

7.1 Minkowski-Diagramme

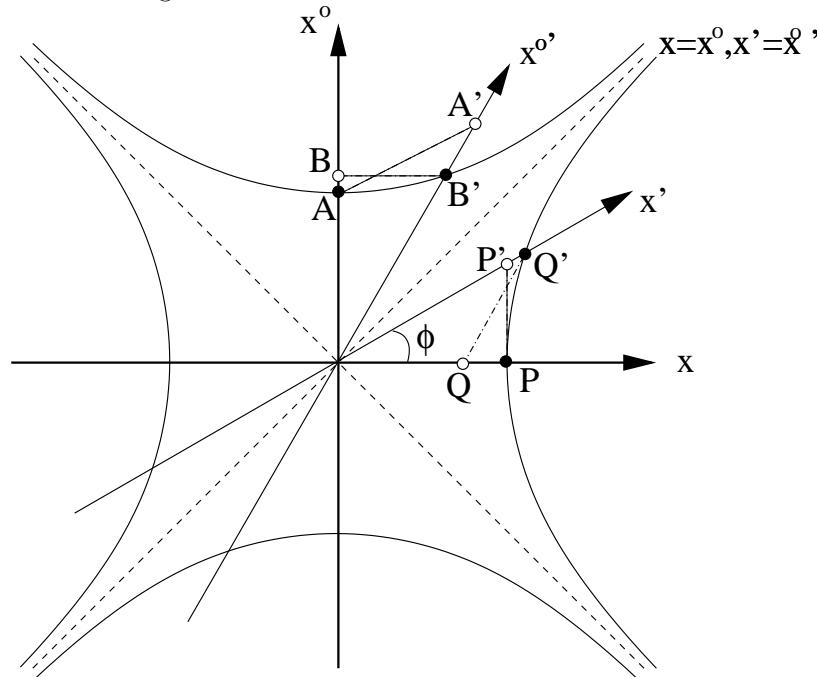
Aus dem unten dargestellten Minkowski-Diagramm läßt sich die Relativität der Gleichzeitigkeit, die Zeitdilatation und die Längenkontraktion folgendermaßen ablesen. Das ungestrichene Koordinatensystem K wurde (willkürlicherweise) als rechtwinklig angenommen. Die x' -Achse des gestrichenen Systems K' ist im Minkowski-Diagramm um den Winkel ϕ mit $\tan \phi = v/c$, $v > 0$, relativ zur x -Achse gedreht, denn

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \end{pmatrix} x'^0 + \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} x',$$

und damit $\tan \phi = \beta\gamma/\gamma = v/c$. Entsprechendes gilt für die x'^0 -Achse und die x^0 -Achse. Zwei Ereignisse, die in K gleichzeitig sind, sind parallel zur x -Achse, aber offensichtlich nicht parallel zur x' -Achse und damit auch nicht gleichzeitig in K' . Umgekehrt sind Punkte, deren Abstand parallel zur x' -Achse ist, gleichzeitig in K' , aber ungleichzeitig in K . Dies ist die Relativität der Gleichzeitigkeit.

Die eingezeichneten Hyperbeln mögen nun zur Eichung von Zeit- und Längeneinheiten in beiden Systemen dienen. Wenn eine Uhr in K' diese Zeiteinheit anzeigt (Weltpunkt B' auf der x'^0 -Achse), wird in K mehr als eine Zeiteinheit gemessen, denn $\overline{OB} > \overline{OA}$. Andererseits vergeht in K zwischen den Ereignissen 0 und A' mehr als eine Zeiteinheit, denn $\overline{OA'} > \overline{OB'}$. Das Phänomen der gegenseitigen Zeitdilatation ist also Ausdruck der Projektionen auf die Zeitkoordinatenachsen, welche bei einer Relativbewegung einen Winkel $\phi \neq 0$ einschließen.

Eine analoge Diskussion dient der geometrischen Deutung der Längenkontraktion. Ein Maßstab der Länge 1 möge zunächst in K' ruhen. Die Weltlinie seines Endpunktes Q' verläuft parallel zur x'^0 -Achse und schneidet die x^0 -Achse in Q . Zur Feststellung der Länge des Maßstabes in K ist die Lage seiner Endpunkte gleichzeitig zu bestimmen. Die entsprechenden Weltpunkte ergeben sich als Schnittpunkte einer zur x -Achse parallelen Gerade mit den Weltlinien der Endpunkte. Für den Zeitpunkt x^0 bedeutet dies gerade die Strecke \overline{OQ} , welche aber kürzer als die Einheitslänge \overline{OP} in K ist. Dies ist die Lorentz-Kontraktion. Entsprechend liest man aus dem Diagramm auch die Verkürzung des in K ruhenden Maßstabes aus Sicht von K' ab.



7.2 Myon-Zerfall

Eine Uhr, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, geht um den Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer. Daher hat ein Myon der Geschwindigkeit v eine mittlere Lebensdauer von $\gamma\tau_0$ im Laborsystem, wobei $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s die mittlere Lebensdauer in seinem Ruhesystem ist. Ein Myon, das in der Höhe $h = 13000$ m erzeugt wurde, braucht eine Lebenszeit von

$$\gamma\tau_0 = \frac{h}{v},$$

um auf der Erdoberfläche detektierbar zu sein. Mit $v\gamma = c\sqrt{\gamma^2 - 1}$ entsteht daraus

$\gamma = \sqrt{\left(\frac{h}{\tau_0 c}\right)^2 + 1}$, so dass ein Myon der Ruhemasse $m_0 = 106 \text{ MeV}/c^2$ die Gesamtenergie

$$m_0\gamma c^2 = m_0 c^2 \sqrt{\left(\frac{h}{\tau_0 c}\right)^2 + 1} \approx \frac{m_0 c^2 h}{\tau_0 c} \approx 2,1 \text{ GeV}$$

besitzen muss, um detektiert werden zu können. Dies entspricht einer Geschwindigkeit von $v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} = h/[\tau_0\sqrt{(h/\tau_0 c)^2 + 1}] \approx 2,996 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,9987 c$.

7.3 Kosmische Strahlung

Es seien $E_p = \sqrt{m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2}$ bzw. $E_\gamma = p_\gamma c$ die Proton- bzw. Photon-Energien mit den entsprechenden Impulsen p_p, p_γ . Außerdem seien E, p bzw. \bar{E}, \bar{p} die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls vor bzw. nach der Kollision. Die Lorentz-Invariante vor der Kollision

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= (E_p + E_\gamma)^2 - (\vec{p}_p + \vec{p}_\gamma)^2 c^2 \\ &= (E_p^2 - p_p^2 c^2) + (E_\gamma^2 - p_\gamma^2 c^2) + 2E_p E_\gamma - 2\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\gamma c^2 \\ &= m_p^2 c^4 + 2E_p E_\gamma - 2p_p p_\gamma c^2 \cos \vartheta, \end{aligned}$$

(mit dem Winkel ϑ zwischen Proton und Photon) ist wegen Energie-Impuls-Erhaltung gleich dem entsprechenden Ausdruck nach der Kollision,

$$\bar{E}^2 - \bar{p}^2 c^2 = (m_p c^2 + m_\pi c^2)^2.$$

Da wir die Mindestenergie des Protons suchen, haben wir die Impulse der Teilchen nach dem Stoß (im Schwerpunktssystem) null gesetzt. Wir setzen die beiden Ausdrücke gleich, $E^2 - p^2 c^2 = \bar{E}^2 - \bar{p}^2 c^2$, und nähern $E_p \simeq p_p c$, was für große Proton-Energien gültig ist. Das ergibt

$$E_p \simeq \frac{m_\pi c^4 (m_\pi + 2m_p)}{2E_\gamma (1 - \cos \vartheta)}.$$

Die untere Schranke für E_p ist somit gegeben durch $\cos \vartheta = -1$. Das Photon der Hintergrundstrahlung hat eine Energie $E_\gamma = k_B T$. Mit $T = 3 \text{ K}$ und den Proton- und Pion-Massen erhält man also eine Mindestenergie für das Proton von

$$E_p = \frac{140 \cdot (140 + 2 \cdot 938)}{4 \cdot 3 \cdot 8,617 \cdot 10^{-11}} \text{ MeV} = 2,7 \cdot 10^{14} \text{ MeV}.$$

7.4 Punktladungen vor geladener Kugel

a) Wir bezeichnen $R_0 = 2a$ und $r_0 = 4a$. Die Leiterkugel kann ersetzt werden durch zwei Spiegelladungen entlang der Verbindungsgeraden zwischen q und Q . Die Ladungen seien q' an r'_0 (für q) und Q' an R'_0 (für Q), wobei q', r'_0, Q', R'_0 so gewählt werden müssen, dass die Randbedingungen (in Kugelkoordinaten)

$$\phi(a, \theta) = 0 \quad \phi(r \rightarrow \infty, \theta) = 0$$

erfüllt sind. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung hängt das Potential nicht vom Winkel φ ab. Wir legen das Koordinatensystem so, dass q, q' bei $\theta = 0$ liegen und Q, Q' bei $\theta = \pi$. Das ergibt folgenden Ansatz für das Potential.

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} + \frac{Q}{|\vec{x} - \vec{x}_3|} + \frac{Q'}{|\vec{x} - \vec{x}_4|} \right],$$

wobei

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}_1| &= \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}, \\ |\vec{x} - \vec{x}_2| &= \sqrt{r^2 + r_0'^2 - 2rr_0' \cos \theta}, \\ |\vec{x} - \vec{x}_3| &= \sqrt{r^2 + R_0^2 + 2rR_0 \cos \theta}, \\ |\vec{x} - \vec{x}_4| &= \sqrt{r^2 + R_0'^2 + 2rR_0' \cos \theta}. \end{aligned}$$

Wir benötigen 4 Gleichungen um die Unbekannten zu fixieren. Diese erhält man indem man die Randbedingung $\phi(a, \theta) = 0$ für vier spezielle Winkel auswertet (z.B. $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$). Dadurch bekommt man allerdings ein kompliziertes nichtlineares Gleichungssystem. Deshalb verwendet man das Superpositionsprinzip und teilt das System in (q, q') (entspricht Kugel plus Ladung q) und (Q, Q') . Für jedes dieser Teilsysteme berechnet man das Potential unter den gegebenen Randbedingungen. Das Gesamtpotential ist dann die Summe der Potentiale der Teilsysteme. Betrachte also eine geladene Kugel mit Radius a und eine Punktladung q im Abstand b . Die Spiegelladung q' befinde sich an b' . Das Potential ist dann:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b'^2 - 2rb' \cos \theta}} \right].$$

Um die zwei benötigten Gleichungen für q' und b' zu bekommen, werten wir die Randbedingung $\phi(a, \theta) = 0$ an $\theta = 0, \pi$ aus. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} q(a - b') + q'(b - a) &= 0, \\ q(a + b') + q'(a + b) &= 0. \end{aligned}$$

Das hat die Lösungen

$$q' = -\frac{qa}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b}.$$

In unserem Fall erhalten wir daher

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{qa}{r_0} = -\frac{q}{4}, & r_0' &= \frac{a^2}{r_0} = \frac{a}{4}, \\ Q' &= -\frac{Qa}{R_0} = -\frac{Q}{2}, & R_0' &= \frac{a^2}{R_0} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man das in den Ansatz für das Potential ein, kann man überprüfen, dass die Randbedingungen in der Tat erfüllt sind.

b) Wir berechnen die Coulombkraft, die Q, Q' und q' auf $q > 0$ ausübt. Die Kraft wirkt in Richtung der Geraden, entlang der die Ladungen liegen, also entlang $\theta = 0$ und an der Stelle $r = r_0 = 4a$. Da $q > 0$, muss für Abstoßung gelten $F(r_0, 0) > 0$, also:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qq'}{(r_0 - r_0')^2} + \frac{qQ'}{(r_0 + R_0')^2} + \frac{qQ}{(r_0 + R_0)^2} \right] &> 0, \\ \frac{-\frac{q}{4}}{\left(4a - \frac{a}{4}\right)^2} + \frac{-\frac{Q}{2}}{\left(4a + \frac{a}{2}\right)^2} + \frac{Q}{36a^2} &> 0, \\ -\frac{4q}{225} - \frac{2Q}{81} + \frac{Q}{36} &> 0. \end{aligned}$$

Das liefert schließlich das Resultat

$$Q > \frac{144}{25}q.$$