8. Tutorium - Lösungen **16.05.2014**

8.1 Geteilter Kreiszylinder

a) Für $R < a$ und $R > a$ ist zu lösen: $\Delta\phi(R,\varphi) = 0$.
Ansatz für $R < a$: $\phi(R,\varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right] \left(\frac{R}{a}\right)^m$.
Wegen vorgegebenem Potential auf den Zylinderhälften muss $\phi(a,-\varphi) = -\phi(a,\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, gelten:
$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos m\varphi - B_m \sin m\varphi\right] = -A_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right]$.
Da das für alle φ gelten muss, folgt: $A_0 = 0$, $A_m = 0$ für $m \geq 1$.
Wegen der Spiegelsymmetrie entlang der y-Achse gilt außerdem $\phi(a,\varphi) = \phi(a,\pi-\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, also
$B_m \sin m\varphi = B_m \sin m(\pi - \varphi) = -(-1)^m B_m \sin m\varphi$, also $B_m = 0$ für $m = 2,4,6,...$
Bleiben nur die ungeraden Koeffizienten B_{2n+1} übrig, die zu bestimmen sind.
Randbedingungen: $\phi(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi = \begin{cases} +\phi_0 & \text{für } 0 < \varphi < \pi, \\ -\phi_0 & \text{für } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$
Berechnung über Orthogonalität der Fourierschen Eigenfunktionen:
$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\left[(2n'+1)\varphi\right] \phi(a,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\left[(2n'+1)\varphi\right] \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \sin\left[(2n+1)\varphi\right]$

$$\frac{1}{\pi}\phi_0 \underbrace{\int_0^{\pi} d\varphi \sin\left[(2n'+1)\varphi\right]}_{\frac{2}{2n'+1}} - \frac{1}{\pi}\phi_0 \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \sin\left[(2n'+1)\varphi\right]}_{-\frac{2}{2n'+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\left[(2n'+1)\varphi\right] \sin\left[(2n+1)\varphi\right]}_{\delta_{nn'}}$$

$\frac{1}{\pi}\frac{4}{2n'+1}\phi_0 = B_{2n'+1}$.
Analog für $R > a$, daher ist die Gesamtlösung:
$\phi(R,\varphi) = \frac{4\phi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} \cdot \begin{cases} \left(\frac{R}{a}\right)^{2n+1} & \text{für } R \leq a, \\ \left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} & \text{für } R \geq a. \end{cases}$
Mit den Formeln aus der Angabe folgt:
$\phi(R,\varphi) = \frac{2\phi_0}{\pi} \cdot \begin{cases} \arctan\frac{2aR\sin\varphi}{a^2-R^2} & \text{für } R \leq a, \\ \arctan\frac{2aR\sin\varphi}{R^2-a^2} & \text{für } R \geq a. \end{cases}$
b) $\mathrm{Div}\vec{E} = (E_n)_a - (E_n)_i = E_R(R\downarrow a,\varphi) - E_R(R\uparrow a,\varphi) = -\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\downarrow a} + \left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\uparrow a} = 4\pi\sigma(\varphi)$.
$R > a$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{2\phi_0}{\pi}\frac{1}{1+\frac{4a^2R^2\sin^2\varphi}{(R^2-a^2)^2}}\left[\underbrace{\frac{2a\sin\varphi}{R^2-a^2} - \frac{4aR^2\sin\varphi}{(R^2-a^2)^2}}_{\frac{2a\sin\varphi}{(R^2-a^2)^2}\left[\underbrace{R^2-a^2-2R^2}_{-(a^2+R^2)}\right]}\right] = -\frac{4\phi_0}{\pi}\frac{a\left(a^2+R^2\right)\sin\varphi}{(R^2-a^2)+4a^2R^2\sin^2\varphi}.$$

$-\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\downarrow a} = \frac{4\phi_0}{\pi}\frac{2a^3\sin\varphi}{4a^4\sin^2\varphi} = \frac{2\phi_0}{a\pi}\frac{1}{\sin\varphi}$.
Analog für $R < a$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{2\phi_0}{\pi}\frac{1}{1+\frac{4a^2R^2\sin^2\varphi}{(a^2-R^2)^2}}\left[\underbrace{\frac{2a\sin\varphi}{a^2-R^2} + \frac{4aR^2\sin\varphi}{(a^2-R^2)^2}}_{\frac{2a\sin\varphi}{(a^2-R^2)^2}\left[\underbrace{a^2-R^2+2R^2}_{(a^2+R^2)}\right]}\right] = \frac{4\phi_0}{\pi}\frac{a\left(a^2+R^2\right)\sin\varphi}{(a^2-R^2)+4a^2R^2\sin^2\varphi}.$$

$\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\uparrow a} = \frac{2\phi_0}{a\pi}\frac{1}{\sin\varphi}$.
In Summe: $\sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{a\pi^2}\frac{1}{\sin\varphi}$.
Anmerkung: $\sigma(\varphi)$ divergiert für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, weshalb bei Punkt (c) der Spalt nicht ignoriert werden kann.
c) Ladung τ_1 pro Längeneinheit auf der Zylinderhälfte 1 ($0 < \varphi < \pi$):

(Da $d \ll a$ gilt $a \sin\varphi \approx a\varphi \approx \frac{d}{2}$ für das Spaltende.)
$\tau_1 \approx a \int_{\frac{d}{2a}}^{\pi-\frac{d}{2a}} d\varphi\, \sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{\pi^2} \int_{\frac{d}{2a}}^{\pi-\frac{d}{2a}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$
Formel für das Integral: $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \left|\tan \frac{\varphi}{2}\right|$.
$\tau_1 \approx \frac{\phi_0}{\pi^2} \left[\log \underbrace{\left|\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d}{4a}\right)\right|}_{\left|\cot \frac{d}{4a}\right| \approx \frac{4a}{d}} - \log \underbrace{\left|\tan \frac{d}{4a}\right|}_{\approx \frac{d}{4a}} \right] = \frac{2\phi_0}{\pi^2} \log \frac{4a}{d} := \tau.$
Analog für $\pi < \varphi < 2\pi$:
$\tau_2 \approx a \int_{\pi+\frac{d}{2a}}^{2\pi-\frac{d}{2a}} d\varphi\, \sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{\pi^2} \int_{\pi+\frac{d}{2a}}^{2\pi-\frac{d}{2a}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$
$= \frac{\phi_0}{\pi^2} \left[\log \underbrace{\left|\tan\left(\pi - \frac{d}{4a}\right)\right|}_{\left|\tan \frac{d}{4a}\right| \approx \frac{d}{4a}} - \log \underbrace{\left|\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d}{4a}\right)\right|}_{\left|\cot \frac{d}{4a}\right| \approx \frac{4a}{d}} \right] = -\frac{2\phi_0}{\pi^2} \log \frac{4a}{d} = -\tau.$
Kapazität pro Längeneinheit:
$C = \frac{\tau}{\phi_0 - (-\phi_0)} = \frac{\tau}{2\phi_0} = \frac{2}{\pi^2} \log \frac{4a}{d}.$

8.2 Multipolmomente eines Kreuzes

a) Die Ladungsdichte lässt sich mit θ- und δ-Funktionen anschreiben:

$$\rho(\vec{x}) = \lambda \left[\theta(a+x)\theta(a-x)\delta(y)\delta(z) + \theta(b+y)\theta(b-y)\delta(x)\delta(z)\right]$$

Die Gesamtladung ist:

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(x) d^3x \\ &= \lambda \int_{-a}^{a} dx + \lambda \int_{-b}^{b} dy \\ &= 2\lambda(a+b) \end{aligned}$$

b) Das Dipolmoment ist:

$$\begin{aligned} p_i &= \int d^3x\, x_i \rho(x_i) \\ &= \lambda \int_{-a}^{a} x\vec{e}_x dx + \lambda \int_{-b}^{b} y\vec{e}_y dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das Quadrupolmoment ist definiert über:

$$Q_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x})(x_i x_j - \frac{r^2}{3}\delta_{ij})$$

Wir berechnen zunächst die Komponenten für $i = j$.

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{\lambda}{3} \int_{-a}^{a} d^3x\, \delta(y)\delta(z)(3x^2 - r^2) + \frac{\lambda}{3} \int_{-b}^{b} d^3x\, \delta(x)\delta(z)(3x^2 - r^2) \\ &= \frac{\lambda}{3} \int_{-a}^{a} dx\, 2x^2 + \frac{\lambda}{3} \int_{-b}^{b} dy\, (-y^2) \\ &= \frac{\lambda}{3} \left(\frac{4a^3}{3} - \frac{2b^3}{3} \right) \\ &= \frac{2\lambda}{9}(2a^3 - b^3) \end{aligned}$$

Völlig analog erhält man:

$$
\begin{aligned}
Q_{yy} &= \frac{2\lambda}{9}(-a^3+2b^3) \\
Q_{zz} &= \frac{2\lambda}{9}(-a^3-b^3)
\end{aligned}
$$

Für $i \neq j$ sind alle Quadrupolmomente 0, zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
Q_{xy} &= 3\lambda \int_{-a}^{a} d^3x\delta(y)\delta(z)xy + 3\lambda \int_{-b}^{b} d^3x\delta(x)\delta(z)xy \\
&= 0 = Q_{yx}
\end{aligned}
$$

c) Das Potential bis zur Quadrupolordnung ist:

$$
\phi(x_i) = \frac{Q}{r} + \frac{x_i p_i}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{Q_{ij}x_i x_j}{r^5} + \ldots
$$

In unserem Fall ist $\vec{x} = (0, 0, z)$ und mit den Resultaten aus Aufgabe (b):

$$
\begin{aligned}
\phi(0,0,z) &= \frac{Q}{z} + \frac{Q_{zz}z^2}{z^5} \\
&= \frac{2\lambda(a+b)}{z} + \frac{\lambda(-a^3-b^3)}{3z^3}
\end{aligned}
$$

d) Das elektrische Feld erhalten wir als Gradienten des Potentials. Allgemein berechnet man (mit leichter Indexgymnastik):

$$
\begin{aligned}
E_i &= -\partial_i\phi \\
&= \frac{Qx_i}{r^3} + \frac{3(p_j x_j)x_i - r^2 p_i}{r^5} + \frac{5(Q_{jk}x_j x_k)x_i - 2Q_{ik}x_k}{r^7}
\end{aligned}
$$

Für unser Beispiel ist das:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(0,0,z) &= \frac{Qz\vec{e}_z}{z^3} + \frac{5Q_{zz}z^2 z\vec{e}_z - 2z^2 Q_{zz}z\vec{e}_z}{z^7} \\
&= \frac{2\lambda(a+b)}{z^2} + \frac{\lambda(-a^3-b^3)}{z^4}\vec{e}_z \\
&= -\partial_z\phi(0,0,z)
\end{aligned}
$$

4.3 Multipolmomente eines Ellipsoids

Elektrostatisches Potential über Kugelflächenfunktionen:

$$
\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{r^{l+1}}q_{lm}^*, \qquad \text{mit } q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1}\int \mathrm{d}^3r'\, r'^l Y_{lm}(\vartheta',\varphi')\rho(\vec{r}').
$$

Multipolmomente mit negativem m lassen sich berechnen über $q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$, was direkt von der entsprechenden Relation der Y_{lm} folgt.
Da das System rotationssymmetrisch um die z-Achse ist, fallen alle Y_{lm} die φ enthalten weg:

$$
\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{2i\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0.
$$

Also $q_{11} = q_{22} = q_{21} = 0$.
Für das Ellipsoid gilt $q_{00} = 0$, da sich die positiven und negativen Ladungen integriert gegenseitig aufheben. Bleiben also nur Dipolmomente. Weiters folgt $q_{11} = 0$ aufgrund der Rotationssymmetrie um φ. Bleibt q_{10}

zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
q_{10} &= \frac{4\pi}{3}\int \mathrm{d}^3r\, r Y_{10}(\vartheta,\varphi)\rho(\vec{r}) \\
&= \frac{4\pi}{3}\int \mathrm{d}^3r\, r\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int \mathrm{d}^3r\, z\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}a^2c\int_0^1 \tilde{r}^2\mathrm{d}\tilde{r}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\left[\int_{-1}^0 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})c\tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}(-\rho_0)+\int_0^1 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})c\tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}(+\rho_0)\right] \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}a^2c\int_0^1 \tilde{r}^3\mathrm{d}\tilde{r}2\pi c\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}a^2c\,\frac{1}{4}2\pi c\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie um den Winkel φ verwinden auch $q_{21}=q_{22}=0$. Weiters verschwindet $q_{20}=0$, weil $Y_{20}\sim(3\cos^2\vartheta-1)$ gerade in $\cos\vartheta$ ist, aber die Ladungsverteilung $\rho(\vartheta)$ ungerade. Das Potenzial des Dipols lautet:

$$
\begin{aligned}
\phi^{(b)}(\vec{r}) &= \frac{Y_{10}(\vartheta,\varphi)}{r^2}q_{10}^* \\
&= \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0 \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\cos\vartheta.
\end{aligned}
$$