9. Tutorium - Lösungen **23.05.2014**

9.1 Kreisförmige Plattenkondensatoren

a) Wegen $d \ll R_0$ können Randeffekte vernachlässigt werden: $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ besitzen nur eine z-Komponente, σ, σ_P sind homogen auf den Metallplatten, ρ_P hängt nur von z ab.
Freie Flächenladungen bei $z = 0$ und $z = d$: $\sigma(z = d) = Q/(\pi R_0^2)$, $\sigma(z = 0) = -Q/(\pi R_0^2)$.
Es ist zweckmäßig, zuerst $\vec{D}$ zu berechnen: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$, $\mathrm{div}\vec{D} = \partial_z D_z(z) = 4\pi\rho = 0$ innen und außen. $\Rightarrow$ $\vec{D}$-Feld ist im Dielektrikum homogen. Obere Platte: $\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{D}_a}_{0} - \underbrace{\vec{D}_i}_{D_z}) = 4\pi\sigma = 4Q/R_0^2 \Rightarrow$

$\vec{D}(\vec{r}) = -4Q/R_0^2\vec{e}_z$ im Dielektrikum.
$\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{e}_z$ mit $E_z(z) = D_z/\epsilon(z)$, $\vec{P}(\vec{r}) = P_z(z)\vec{e}_z$, $P_z(z) = \chi_e E_z(z) = \frac{\epsilon-1}{4\pi}E_z(z) = \frac{1}{4\pi}(1 - \frac{1}{\epsilon})D_z$

$$\Rightarrow E_z(z) = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}, \qquad P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\right).$$

b) Freie Flächenladungsdichte σ: siehe (a).
Polarisations-Flächenladungsdichte $\sigma_P = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{P}_a}_{0} - \underbrace{\vec{P}_i}_{P_z(d)})$

$$\Rightarrow \sigma_P(z = d) = P_z(d) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right), \qquad \sigma_P(z = 0) = -P_z(d) = \frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0}\right).$$

Polarisationsraumladungsdichte: $\rho_P(z) = -\mathrm{div}\vec{P} = -\partial_z P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2 d}\frac{\Delta\epsilon}{\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)^2}$ im Dielektrikum.

9.2 Kugelförmiger Elektret

a) Im Inneren der Kugel $r < a$ hat man $\rho_P(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 P_r(r)\right) = -\frac{1}{r^2}\partial_r\left(P_0\frac{r^3}{a}\right) = -\frac{3P_0}{a} =: \rho_0$.
Am Rand der Kugel $r = a$ gilt: $\sigma_p = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{P}_\mathrm{a}}_{0} - \vec{P}_\mathrm{i}) = +P_r(r \to a) = P_0 =: \sigma_0$.

Gesamtladung: $q_P = \frac{4\pi a^3}{3}\rho_0 + 4\pi a^2\sigma_0 = \frac{4\pi a^3}{3}\left(-\frac{3P_0}{a}\right) + 4\pi a^2 P_0 = 0$.
b) <u>Lösungsweg 1</u>: über das $\vec{E}$ Feld
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi(\underbrace{\rho(\vec{r})}_{0} + \rho_P(\vec{r})), \qquad \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$.

Radialsymmetrie: $E_\theta = 0$, $E_\varphi = 0$. Im Inneren gilt: $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho_P(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2E_r) = 4\pi\rho_0 \Rightarrow r^2E_r = 4\pi\rho_0\int_0^r r'^2\mathrm{d}r' = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \Rightarrow E_r = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r = -4\pi P_0\frac{r}{a}$ für $r < a$.
Außen gilt: $\vec{E} = 0$.
Daraus folgt $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi P_0\frac{r}{a}\vec{e}_r + 4\pi P_0\frac{r}{a}\vec{e}_r = 0$ innen und außen.
<u>Lösungsweg 2</u>: über das $\vec{D}$ Feld
$r < a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$r > a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ (auch keine Quellen und Wirbel von $\vec{D}$ im Unendlichen)
$r = 0$: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma = 0, \qquad \mathrm{Rot}\vec{D} = \underbrace{\mathrm{Rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{Rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \vec{0}$ im ganzen Raum $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r & r < a \\ \vec{0} & r > a. \end{cases}$

9.3 Hohlraum in Dielektrikum

a) $\vec{D}_0 = \epsilon\vec{E}_0 = \vec{E}_0 + 4\pi\vec{P}_0$.
$\rightarrow \qquad \vec{E}_0 = \frac{4\pi}{\epsilon-1}\vec{P}_0$.
b) Die Feldgleichungen für $\vec{E}(\vec{r})$ lauten:
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0$, $\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$, für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:
$E_r^i(r = a, \theta) = \epsilon E_r^a(r = a, \theta)$,
$E_\theta^i(r = a, \theta) = E_\theta^a(r = a, \theta)$.
(entspricht $\mathrm{Div}\vec{D} = 0$, $\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{0}$).
$E_r^a(r \to \infty, \theta) \to E_0 \cos\theta$.

Die Feldgleichungen für $\phi(\vec{r})$ lauten:
$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:
$\left.\frac{\partial\phi_i(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon \left.\frac{\partial\phi_a(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$.
$\phi_i(r = a, \theta) = \phi_a(r = a, \theta)$.
$-\left.\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r\to\infty} \to E_0 \cos\theta$.
c) $r \neq a$: $\Delta\phi(r, \theta) = 0$.
Im Außenraum gilt: $r > a$: $\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_l}{r^{l+1}} + b_l r^l\right) P_l(\cos\theta)$.
Aus $-\left.\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r\to\infty} \to E_0 \cos\theta$ folgt
$-\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r} = +\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)a_l}{r^{l+2}} P_l(\cos\theta) - \sum_{l=1}^{\infty} l b_l r^{l-1} P_l(\cos\theta) \to \frac{4\pi}{\epsilon-1} P_0 \underbrace{\cos\theta}_{=P_1(\cos\theta)}$
$\to b_1 = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0$, $b_l = 0$ für $l \geq 2$. Die Konstante b_0 kann man beliebig setzen, z.B. $b_0 = 0$.
$\to \phi(r, \theta) = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$.

Im Innenraum gilt: $r < a$: $\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta)$.
Stetigkeitsbedingungen bei $r = a$:
Aus $\phi_i(r = a, \theta) = \phi_a(r = a, \theta)$ folgt:
$c_0 = \frac{a_0}{a}$, $c_1 a = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 a + \frac{a_1}{a^2}$,$c_l = \frac{a_l}{a^{2l+1}}$ für $l \geq 2$.
Aus $\left.\frac{\partial\phi_i(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon \left.\frac{\partial\phi_a(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$ folgt:
$\sum_{l=1}^{\infty} l c_l a^{l-1} P_l(\cos\theta) = \epsilon \left[-\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0\cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)a_l}{a^{l+2}} P_l(\cos\theta)\right]$
$\to a_0 = 0$, $c_0 = 0$.
$c_1 = -\epsilon\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 - \epsilon\frac{2a_1}{a^3}$, $-c_1 = +\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 - \frac{a_1}{a^3}$.
$\to (2\epsilon + 1)\frac{a_1}{a^3} = -4\pi P_0 \to a_1 = -\frac{4\pi}{2\epsilon+1}a^3 P_0$.
$c_1 = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 - \frac{4\pi}{2\epsilon+1}P_0 = -\frac{4\pi[2\epsilon+1+\epsilon-1]}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}P_0$.
$c_1 = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}P_0$.
$l c_l a^{l-1} = -\frac{(l+1)a_l}{a^{l+2}}\epsilon$, $c_l = \frac{a_l}{a^{2l+1}} \to c_l = a_l = 0$ für $l \geq 2$.
Somit gilt im Innenraum $r < a$:
$\phi(r, \theta) = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}P_0 \underbrace{r\cos\theta}_{z}$
$\vec{E}(r, \theta) = \frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}\vec{P}_0$.
$\left|\vec{E}\right| = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1}\left|\vec{E}_0\right| > \left|\vec{E}_0\right|$, da $\epsilon > 1$.