

# Lösungen zu Übungsblatt 1

## 1. Indexgymnastik

(a)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (2)$$

(b)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} \quad (4)$$

(c)

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad (5)$$

(d)

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{\vec{r}}{r} f(r) \right) = \frac{f(r)}{r} \left[ \vec{a} - \frac{\vec{r}}{r} \left( \vec{a} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] + \frac{\vec{r}}{r} \left( \vec{a} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (6)$$

## 2. Satz von Gauß

(a) Das Resultat ist  $\frac{3}{4}\pi R^4 H$ . Es empfiehlt sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten.

(b) Das Resultat ist dasselbe wie in (a). Der Beitrag des Bodens ist 0, der Beitrag des Deckels ist  $R^2\pi H$ , der Beitrag des Mantels ist  $H \left( R^4 \frac{3}{8} 2\pi - R^2 \frac{1}{2} 2\pi \right)$ .

## 3. Satz von Stokes

(a) Der Rand ist ein Kreis mit Radius  $R$  an  $z = 0$ . Das Resultat ist 0.

(b) Das Resultat ist dasselbe wie in (a). Der Normalenvektor ist  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$ .