Lösungen zu Übungsblatt 2

1. **Krummlinige Koordinaten**
In kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten berechnet man

$$\vec{R} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1}$$
$$\vec{R} = r\vec{e}_r \qquad R = r \tag{2}$$
$$\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \qquad R = \sqrt{r^2+z^2}. \tag{3}$$

Unter der Verwendung des Gradienten und des Laplaceoperators in den entsprechenden Korrdinatensystemen erhählt man, unabhängig von der Wahl der Koordinaten:

$$\vec{\nabla} R = \frac{\vec{R}}{R} \tag{4}$$
$$\Delta R = \frac{2}{R} \tag{5}$$

2. **Monopole und elektrisch-magnetische Dualität**

(a) Die Maxwellgleichungen (in Gauß-Einheiten) reduzieren sich ohne äussere Quellen zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{6}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{7}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{8}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{9}$$

Unter der Dualitätstransformation gehen (6) und (7) sowie (8) und (9) in einander über. Mit äusseren Quellen sind diese nicht mehr invariant unter dem Austausch von elektrischen und magnetischen Feldern.

(b)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e \tag{10}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m \tag{11}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\right) \tag{12}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\right) \tag{13}$$

(c) Die Maxwellgleichungen sind invariant unter den folgenden Transformationen:

$$\vec{E}' = \vec{E}\cos\xi - \vec{B}\sin\xi \tag{14}$$
$$\vec{B}' = \vec{B}\cos\xi + \vec{E}\sin\xi \tag{15}$$
$$\begin{pmatrix} \rho'_e \\ \vec{j}'_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_e \\ \vec{j}_e \end{pmatrix}\cos\xi - \begin{pmatrix} \rho_m \\ \vec{j}_m \end{pmatrix}\sin\xi \tag{16}$$
$$\begin{pmatrix} \rho'_m \\ \vec{j}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m \\ \vec{j}_m \end{pmatrix}\cos\xi + \begin{pmatrix} \rho_e \\ \vec{j}_e \end{pmatrix}\sin\xi, \tag{17}$$

Das sieht man durch explizites Einsetzen.

(d) Durch Einsetzen der Transformationen sieht man, dass $\vec{E}\times\vec{B}$ und $\vec{E}^2+\vec{B}^2$ invariant sind.

3. **Punktladungen**

(a)
$$\rho(\vec{r}) = (q_1\delta(z-a) + q_2\delta(z+a))\,\delta(x)\delta(y) \qquad Q = q_1 + q_2 \tag{18}$$

(b)
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix} + \frac{q_2}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+a \end{pmatrix} \tag{19}$$

Die Spezialfälle erhält man durch Einsetzen der entsprechenden Werte.

(c) Da wir an der Kraft auf die “untere” Ladung interessiert sind, wählen wir V als den unteren Halbraum $z < 0$. Da die Felder im Unendlichen verschwinden, ist der einzige Beitrag zum Oberflächenintegral entlang der Ebene $z = 0$ mit $d\vec{f} = \vec{e}_z dxdy$. Deshalb benötigen wir nur die z-Komponente des Spannungstensors. Die einzige nicht-verschwindende Komponente ist

$$T_{zz} = -\frac{1}{8\pi}\frac{4(x^2+y^2)q^2}{[x^2+y^2+a^2]^3} \tag{20}$$

Daraus ergibt sich $\vec{F}^{mech} = F_z\vec{e}_z$ mit

$$F_z = -\frac{q^2}{(2a)^2} \tag{21}$$

Das ist die Coulombkraft.