Lösungen zu Übungsblatt 3

1. **Kugel mit Loch**

   (a) Wir benötigen nun ein Volumen V auf dem das Feld konstant ist. Aufgrund der sphärischen Symmetrie wählen wir eine Kugel mit Radius r. Die Ladungsdichte ist

   $$\rho(\vec{x}) = \rho_0 \Theta(R - r) = \frac{Q}{V}\Theta(R - r) = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}\Theta(R - r). \tag{1}$$

   Auswerten des Gauß'schen Gesetzes in Integralform für dieses Volumen ergibt:

   $$\vec{E}(r) = \vec{e}_r Q \begin{cases} \frac{r}{R^3} & r < R \\ \frac{1}{r^2} & r > R \end{cases} \tag{2}$$

   (b) Der Hohlraum lässt sich dadurch beschreiben, dass man eine fiktive "Antikugel" mit Radius R' einführt, die die negative Ladungsdichte $-\rho_0$ trägt. Nach dem Superpositionsprinzip ist die Feldstärke durch die Summe der Feldstärken von Kugel und Antikugel $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Aus den Resultaten aus (a) berechnet man:

   $$\vec{E} = Q\frac{\vec{a}}{R^3}. \tag{3}$$

2. **Geladener Zylinder**

   (a) Wir verwenden Zylinderkoordinaten. Aus Symmetriegründen ist $\phi(r, \varphi, z) = \phi(r)$. Die Poissongleichung in Zylinderkoordinaten vereinfacht sich entsprechend und kann leicht integriert werden. Drei der vier Integrationskonstanten werden bestimmt durch folgende Bedingungen:

   - Regularität von ϕ and $r = 0$.
   - Stetigkeit von ϕ and $r = a$.
   - Das elektrische Feld "springt" an $r = a$ aufgrund der Oberflächenladung:

   $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (E_n)_{aussen} - (E_n)_{innen} = -\left.\frac{d\phi(r)}{dr}\right|_{r\downarrow a} + \left.\frac{d\phi(r)}{dr}\right|_{r\uparrow a} = 4\pi\sigma_0. \tag{4}$$

   Daraus ergibt sich (für eine geeignete Wahl der letzten Integrationskonstante)

   $$\phi(r) = \begin{cases} \pi\rho_0(a^2 - r^2) & r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \tag{5}$$

   (b)

   $$E(r) = \begin{cases} 2\pi\rho_0 r & r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \tag{6}$$

3. **Punktladung zwischen gewinkelten Leiterebenen**

(a) Man braucht 5 Spiegelladungen. Wir nummerieren die Ladungen mit $Q_0, \ldots, Q_5$ im Gegenuhrzeigersinn. Q_0 sei die "echte" Ladung entlang der x-Achse. Die Ortsvektoren $\vec{x}_i$ sind:

$$\vec{x}_i = r_0 \cos \frac{2i\pi}{6} \vec{e}_x + r_0 \sin \frac{2i\pi}{6} \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \qquad i = 0, \ldots, 5. \tag{7}$$

Die Poissongleichung ist:

$$\Delta \phi(\vec{x}) = -4\pi\rho = -4\pi\delta(x - r_0)\delta(y)\delta(z) \tag{8}$$

Da die Leiterplatten geerdet sind, sind die Randbedingungen:

$$\phi(r, \varphi = \frac{\pi}{6}, z) \ = \ 0 \tag{9}$$

$$\phi(r, \varphi = -\frac{\pi}{6}, z) \ = \ 0, \tag{10}$$

wobei $r > 0$ gilt. Weiters muss das Potenzial im Unendlichen verschwinden.

(b)

$$\phi \ = \ \sum_{i=0}^{5} \frac{(-1)^i q}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\frac{2\pi i}{6} - \varphi) + z^2}} \tag{11}$$

Duch Einsetzen sieht man $\phi(r, \varphi = \frac{\pi}{6}, z) = 0$ und analog für die andere Platte.

(c) Die Oberflächenladungsdichte ist

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = \frac{1}{4\pi} \vec{n} \vec{E}, \tag{12}$$

Der Normalenvektor ist $\vec{e}_\varphi$. Deshalb muss man nur E_φ berechnen.

$$\sigma(r, z) = \frac{q r_0}{4\pi} \left[\frac{2}{\left[r^2 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[r^2 - \sqrt{3} r r_0 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[r^2 + \sqrt{3} r r_0 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] \tag{13}$$