Lösungen zu Übungsblatt 4

1. **Leitende Ebene mit kugelförmiger Ausbuchtung**
   Betrachte eine unendlich ausgedehnte geerdete Ebene mit einer Ausbuchtung in Form einer Halbkugel mit Radius a. Eine Punktladung q befindet sich auf der Symmetrieachse im Abstand $b > a$ vom Mittelpunkt der Halbkugel (siehe Bild unten).

   (a) Berechne das elektrostatische Potenzial ϕ mit Hilfe der Methode der Bildladung und überprüfe, dass es die richtigen Randbedingungen erfüllt.

   (b) Berechne die auf der Halbkugel influenzierte Gesamtladung.

   Lösung:

   (a) Ansatz: Wir spiegeln die Ladung an der Kugel und an der Ebene und die erhaltenen Bildladungen werden nochmals an der anderen Fläche gespiegelt, was zu einer dritten Bildladung führt:

   $$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - b\vec{e}_z|} - \frac{q}{|\vec{r} + b\vec{e}_z|} - \frac{q'}{|\vec{r} - b'\vec{e}_z|} + \frac{q'}{|\vec{r} + b'\vec{e}_z|} \quad \text{mit} \quad q' = q\frac{a}{b}\,, b' = \frac{a^2}{b}\,.$$

   Dies erfüllt die Randbedingungen.

   (b) Berechnung der influenzierten Ladungsdichte, mittels $4\pi\sigma = E_r(r = a)$, wobei $E_r = -\partial\phi/\partial r$ ist. Dies ergibt

   $$\sigma = \frac{qa\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{4\pi}\left(\frac{1}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}\right)\,. \tag{1}$$

   Um die influenzierte Gesamtladung zu finden muessen wir jetzt noch über die Halbkugel integrieren:

   $$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(\theta) a^2 \sigma = -q\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\,. \tag{2}$$

2. **Potenzial über zwei Halbebenen**
   Zwei unendliche leitende Halbebenen in der (x, y)-Ebene treffen sich entlang der y-Achse in einem vernachlässigbar kleinen Spalt. Die Halbebene mit $x < 0$ hat Potenzial $-\phi_0$ und die andere mit $x > 0$ wird auf Potenzial $+\phi_0$ gehalten. Berechne das elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$ mit Hilfe einer Dirichlet-Green-Funktion und skizziere die Äquipotenzialflächen.

   Lösung:
   Aus der allgemeinen Gleichung (12.30) im Buch folgt für $\rho = 0$

   $$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int dx' \int dy' \phi(x', y', 0) \frac{-2|z|}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \frac{2\,\mathrm{sign}(z)\,\phi_0\,\arctan\left(\frac{x}{z}\right)}{\pi}\,. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Äquipotenzialflächen erfüllen $x = z$ und sind somit Strahlen in der (x, z)-Ebene.

3. **Plattenkondensator**
Ein Plattenkondensator besteht aus zwei Platten der Fläche A im Abstand d. Die Abmessung der Flächen ist viel grösser als ihr Abstand, sodass Randfelder vernachlässigt werden können.

   (a) Der Plattenkondensator wird mit einer Batterie aufgeladen, sodass die Potenzialdifferenz U_0 ist und die Ladungen der Platten $+Q_1$ und $-Q_1$. Welche Arbeit ist nötig um den Plattenabstand von d nach $d + \Delta d$ zu erhöhen? Wie groß ist die Änderung der Energie des Kondensators?

   (b) Nimm nun an, dass die Batterie angeschlossen bleibt, wenn der Plattenabstand erhöht wird. Wieviel Arbeit muss dann verrichtet werden, um den Abstand von d nach $d+\Delta d$ zu erhöhen? Was ist die Energieänderung in diesem Fall? Zeige, dass die Energie erhalten ist, wenn alle Energiequellen und -senken berücksichtigt werden.

Lösung:

   (a) Die Arbeit, die verrichtet werden muss um die obere Platte um Δd nach oben zu verschieben ist:

$$W = (-F)\Delta d = (-\sigma A E_{unten})\Delta d = \frac{2\pi Q_1^2 \Delta d}{A}\,, \qquad (4)$$

   wobei E_{unten} das elektrische Feld der unteren Platte ist, da das eigene elektrische Feld der oberen Platte hier nicht beiträgt.
   Die Änderung der elektrostatischen Energie ist $\Delta U = W$.

   (b) Aufgrund von Energieerhaltung gilt:

$$W_{Kraft} + W_{Batterie} = \Delta U \qquad (5)$$

   Die Änderung der elektrostatischen Energie ist

$$\Delta U = \frac{AU_0^2}{8\pi}\left(\frac{1}{d+\Delta d} - \frac{1}{d}\right) \simeq -\frac{AU_0^2}{8\pi d^2}\Delta d \qquad (6)$$

   Es wird (negative) Arbeit von der Batterie verrichtet, da diese Ladung von der unteren zur oberen Platte transportiert:

$$W_{Batterie} = -\frac{AU_0^2}{4\pi d^2}\Delta d \qquad (7)$$

   Die Arbeit, die durch die äussere Kraft verrichtet wird ist dieselbe wie in Teilaufgabe (a). Die Energieerhaltung ist erfüllt.