Übungsblatt 5

für das Tutorium am 08.05.2015

1. **Legendre-Polynome**
   Die Legendre-Polynome können mit Hilfe der Formel von Rodrigues berechnet werden:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \,. \tag{1}$$

   (a) Verwende die Formel von Rodrigues um zu zeigen, dass

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \,. \tag{2}$$

   Hinweis:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{1+2n}}{(2n+1)!} \,. \tag{3}$$

   (b) Berechne mit Hilfe der Formel von Rodrigues das fünfte Legendre-Polynom.

   (c) Die Legendre-Polynome haben die erzeugende Funktion

$$g(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n \,. \tag{4}$$

   Berechne damit das fünfte Legendre-Polynom.
   Hinweis:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = \ldots - \frac{5y^3}{16} + \frac{35y^4}{128} - \frac{63y^5}{256} + \ldots$$

   .

Lösung:

(a) Das Integral was zu berechnen ist

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{1} dx \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{5}$$

Wir verwenden partielle Integration. Bis zum n-ten Integrationsschritt fällt der Randterm immer weg, da ein Faktor $(x^2 - 1)$ vorkommt. Das heisst:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{1} dx (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^m \,. \tag{6}$$

Eine Fallunterscheidung $m < n$ und $m = n$ führt zum gewünschten Ergebnis.

(b) und (c) haben die Lösung

$$P_5(x) = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x \,. \tag{7}$$

2. **Punktdipol und Punktladung**
Ein Punktdipol $\vec{p} = p\vec{e}_z$ befinde sich am Koordinatenursprung. Eine Punktladung q befinde sich an $\vec{r}_1 = (0, y_1, 0)$.

   (a) Berechne die Kraft, die das Feld des Dipols auf die Ladung ausübt. Welche Kraft wirkt auf den Dipol?

   (b) Wieviel Arbeit benötigt man um die Ladung von $\vec{r}_1 = (0, y_1, 0)$ ins Unendliche (in y-Richtung) zu verschieben, wenn der Dipol im Ursprung festgehalten wird? Wieviel Arbeit benötigt man um den Dipol bei festgehaltener Punktladung ins Unendliche zu verschieben?

   (c) Wir bewegen nun die Punktladung nach $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Wieviel Arbeit ist nötig um die Ladung dorthin zu bewegen? Welche Kraft wirkt auf die Punktladung an $\vec{r}_2$?

   Lösung:

   (a) Vom elektrischen Feld eines Dipols ergibt sich die Kraft $\vec{F}_q = -\frac{qp}{y_1^3}\vec{e}_z$. Die Kraft auf den Dipol ist gleichgross, aber entgegengesetzt gerichtet.

   (b) Die Arbeit um die Punktladung entlang der y-Achse ins Unendliche zu verschieben ist 0, genau wie die Arbeit um den Punktdipol ins Unendliche zu verschieben.

   (c) Die Arbeit die nötig ist um die Punktladung nach $\vec{r}_2$ zu verschieben ist:

$$W = \frac{qpz_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \,. \tag{8}$$

   Die Kraft auf die Ladung an $\vec{r}_2$ ist

$$\vec{F} = qp\left(\frac{3z_2\vec{r}_2}{r_2^5} - \frac{\vec{e}_z}{r_2^3}\right) \tag{9}$$

3. **Multipolmomente geladener rotationssymmetrischer Ellipsoide**
Gegeben sei ein bezüglich der z-Achse rotationssymmetrischer Ellipsoid mit Hauptachsen $a = b$, c. Das Ellipsoid sei für $z > 0$ positiv und für $z < 0$ negativ mit Raumladungsdichte $\pm\rho_0$ geladen. Berechne die elektrostatischen sphärischen Multipolmomente q_{lm} mit $l \leq 2$ und schreibe das elektrostatische Potenzial in der entsprechenden Näherung für $r > max(a, c)$ an.

   Lösung:

   Das elektrostatische Potenzial über Kugelflächenfunktionen ist:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{r^{l+1}}q_{lm}\,, \quad \text{mit} \quad q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1}\int d^3r' r'^l Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')\,. \tag{10}$$

   Multipolmomente mit negativem m lassen sich berechnen über $q_{l,-m} = (-1)^m q^*_{lm}$, was direkt von der entsprechenden Relation der Y_{lm} folgt.

   Man kann durch Symmetrieüberlegungen zeigen, dass $Y_{lm} = 0$ für $m \neq 0$. Für $m = 0$ findet man $q_{00} = q_{20} = 0$ und

$$q_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\,. \tag{11}$$