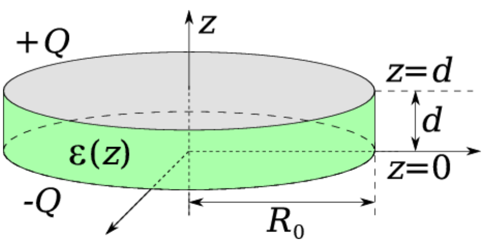
Übungsblatt 6

für das Tutorium am 15.05.2015

1. **Kreisförmige Plattenkondensatoren**
   Gegeben sei eine Anordnung von zwei unendlich dünnen parallelen kreisförmigen Metallplatten mit Radius R_0, Abstand $d \ll R_0$ und den freien Gesamtladungen $+Q$ bzw. $-Q$ (siehe Abbildung). Der Raum zwischen den Platten sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Dielektrizitätskonstante gemäß $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z/d$ vom Ort abhängt, wobei $\epsilon_1 > 0$ ist.

   (a) Berechne die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, das Polarisationsfeld $\vec{P}$ und das Verschiebungsfeld $\vec{D}$ im Dielektrikum.

   (b) Berechne die Flächenladungsdichten freier Ladungen und Polarisationsladungen bei $z = d$ und $z = 0$, sowie die Polarisationsladungsdichte im Dielektrikum.



*L*ösung:

(a) Da $d \ll R_0$ ist, können wir Randeffekte vernachlässigen. Dies bedeutet, dass $\vec{D}$, $\vec{E}$ und $\vec{P}$ nur von z abhängen und in z-Richtung zeigen. Im Dielektrikum ist das Verschiebungsfeld

$$\vec{D} = -\frac{4Q}{R_0^2}\vec{e}_z\,. \tag{1}$$

Die elektrische Feldstärke und das elektrische Polarisationsfeld folgen dann trivial.

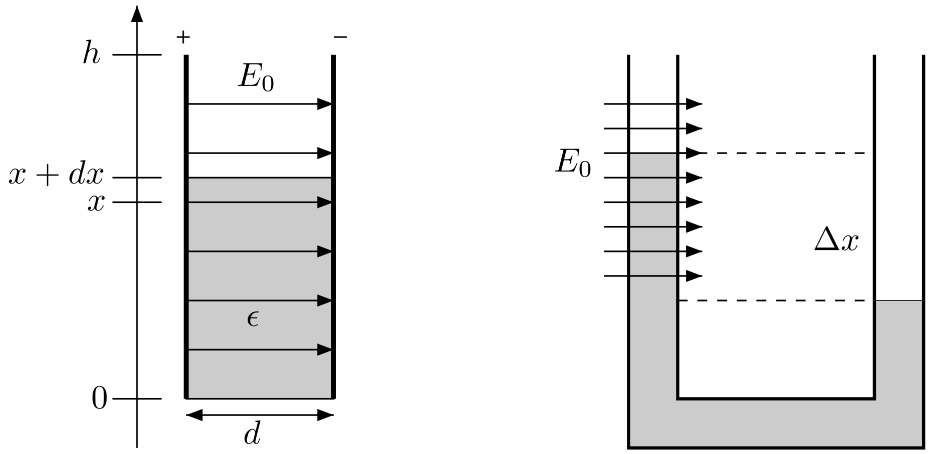
(b) Die freien Flächenladungsdichten sind

$$\sigma(z=0) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\,, \qquad \sigma(z=d) = \frac{Q}{\pi R_0^2}\,, \tag{2}$$

Die Polarisationsflächenladungsdichte ist definiert durch $\sigma_P =: -\vec{n}\cdot(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$ und die Polarisationsladungsdichte im Dielektrikum ist $\rho_p(z) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(z) = -\partial_z P_z(z)$. Das Ergebnis folgt dann von dem Ergebnis für $\vec{P}$ in Teil (a).

2. **Steighöhenmethode**
   Auf einen begrenzten dielektrischen Körper wirkt im elektrischen Feld eine "ponderomotische" Kraft. Um diese zu berechnen soll ein Plattenkondensator (Plattenabstand d, Höhe h, Breite der Platten b) betrachtet werden, dessen Zwischenraum bis

zur Position x ein Dielektrikum der Permittivität ϵ ausfüllt, während der restliche Raum leer ist.



(a) Berechne die Kapazität $C(x)$ des Kondensators.

(b) Der Kondensator sei an eine Batterie angeschlossen, sodass die Platten auf konstanter Potentialdifferenz V gehalten werden. Berechne, die Kraft mit der das Dielektrikum in den Kondensator hineingezogen wird und drücke das Resultat durch das elektrische Feld E_0 zwischen den Kondensatorplatten aus. Um das Resultat zu erhalten, betrachte die Energiebilanz, wenn das Dielektrikum um dx verschoben wird.

(c) Die Permittivität ϵ einer Flüssigkeit mit Massendichte ρ_m lässt sich messen, indem man sie in ein U-förmiges Rohr füllt und einen Schenkel in ein homogenes elektrisches Feld E_0 einbringt. Wie lautet der Zusammenhang zwischen ϵ und der durch das Feld hervorgerufenen Steighöhe Δx der Flüssigkeit?

Lösung:

(a) Die Gesamtkapazität ist $C = \frac{1}{4\pi}\frac{b}{d}\left[x(\epsilon - 1) + h\right]$.

(b) Um die Potentialdifferenz konstant zu halten, fließt eine zusätzliche Ladung $dQ = VdC = V\frac{dC}{dx}dx$ von der Batterie auf die Kondensatorplatten. Die Batterie leistet dabei Arbeit und verliert einen Teil ihres Energieinhalts. Die Energiebilanz lautet daher $dW_e + dW_m + dW_b = 0$, wobei wir $dW_m = Fdx$ schreiben. Die gesuchte ponderomotische Kraft lautet

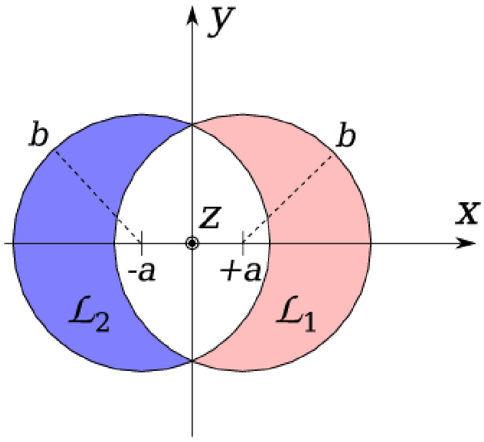
$$F = \frac{1}{8\pi} bd(\epsilon - 1)E_0^2 . \qquad (3)$$

(c) Die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule der Höhe Δx im Schwerefeld der Erde ist $F_G = mg$. Diese Kraft muss die ponderomotische Kraft F aufheben. Gleichsetzen liefert die folgende Formel zur Bestimmung von ϵ aus der Steighöhe Δx:

$$\epsilon = 1 + \frac{8\pi\rho_m g}{E_0^2}\Delta x \qquad (4)$$

Wie zu erwarten war ist das Resultat nicht von der Geometrie des Kondensators abhängig.

3. **Das magnetische Feld zwischen zwei unendlich langen Leitern**
Zwei unendlich lange Leiter $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ besitzen sichelförmige Querschnitte und räumliche Lage wie in der Abbildung unten dargestellt. Der Leiter $\mathcal{L}_1$ wird in negativer z-Richtung, der Leiter $\mathcal{L}_2$ in positiver z-Richtung von einem über den Querschnitt gleichmäßig verteilten elektrischen Strom der Dichte j_0 durchflossen. Berechne die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ in dem zwischen den Leitern eingeschlossenen Raumbereich.



*L*ösung: Die Anordnung in der Aufgabe ist die Superposition von zwei Zylindern mit Strömen in entgegengesetzter Richtung. Durch addieren der entsprechenden $\vec{B}$-Felder findet man $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} a j_0 \, \vec{e}_y$.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2a, 2bc, 3