Übungsblatt 7

für das Tutorium am 22.05.2015

1. **Stromdurchflossener Leiter**

   (a) Berechne mit dem Biot-Savartschen Gesetz das Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Stromschleife an $z = 0$ mit Eckpunkten $(x, y) = \{(a, a), (-a, a), (-a, -a), (a, -a)\}$, welche im Gegenuhrzeigersinn von einem konstanten Strom I durchflossen wird.

   (b) Betrachte nun ein regelmässiges Polygon mit n Seiten, bei dem der Normalabstand von jeder Seite zum Mittelpunkt a ist und durch das im Gegenuhrzeigersinn ein Strom I fliesst. Konstruiere das Polygon so, dass der Mittelpunkt an $(x, y, z) = (0, a, 0)$ liegt und eine Seite entlang der x-Achse. Berechne das Magnetfeld im Mittelpunkt des Polygons.

   (c) Berechne das Feld aus Punkt (b) im Grenzwert $n \to \infty$. Welcher Geometrie entspricht das?

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2 + b^2}} \tag{1}$$

Lösung:

(a) Wir verwenden das Biot-Savartsche Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\ell \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \tag{2}$$

wobei $\mathcal{C}$ die Stromschleife ist. Das Magnetfeld setzt sich aus den Beiträgen der vier Seiten zusammen und das Resultat ist:

$$\vec{B}(0,0,0) = 4\vec{B}_1(0,0,0) = \frac{4I\sqrt{2}}{c\,a}\vec{e}_z\,, \tag{3}$$

wobei $\vec{B}_1$ der Beitrag einer Seite ist.

(b) Diese Aufgabe löst man am besten indem man sich einen Spezialfall aufzeichnet, zum Beispiel das verschobene Quadrat oder ein Sechseck. Daraus sieht man, dass der Öffungswinkel zu einer Seite $\frac{2\pi}{n}$ ist. Wir betrachten nun die Seite, die auf der x-Achse liegt. Die y-Achse teilt den Öffungswinkel und die Eckpunkte an der x-Achse sind bei $(-a\tan\frac{\pi}{n}, 0, 0)$ und $(a\tan\frac{\pi}{n}, 0, 0)$. Um das Magnetfeld der einen Seite zu erhalten müssen wir zwischen diesen Punkten entlang der x-Achse integrieren. Das Ergebnis ist

$$\vec{B}_x(0,a,0) \;=\; \frac{2I}{c\,a}\sin\frac{\pi}{n}\vec{e}_z, \tag{4}$$

wobei die Formel im Hinweis und im letzten Schritt $\tan x = \sin x/\cos x$ sowie $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ verwendet wurden. Aufgrund der Rotationssymmetrie im Zentrum tragen alle anderen Seiten den gleichen Wert bei. Daher erhalten wir

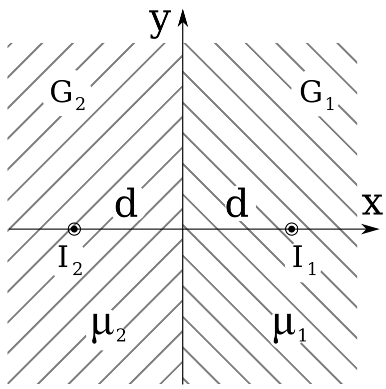
$$\vec{B}(0,a,0) = \frac{2I}{c\,a}n\sin\frac{\pi}{n}\vec{e}_z\,. \tag{5}$$

Für $n = 4$ erhalten wir das Resultat aus Punkt (a) mit $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Der Limes $n \to \infty$ entspricht einem kreisförmigen stromdurchflossenen Leiter mit Radius a. Da das (vereinfachte) Resulat die Form $0 \times \infty$ hat verwenden wie die Regel von de l'Hospita und finden

$$\lim_{n\to\infty} \vec{B}(0,a,0) \quad = \quad \frac{2\pi I}{c\,a}\vec{e}_z\,. \tag{6}$$

2. **Halbräume mit unterschiedlichen Permeabilitäten**
Zwei Dia- oder Paramagnetika mit den Permeabilitäten μ_1, μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) grenzen mit einer ebenen Trennfläche aneinander. Im Medium 1 befinde sich im Abstand d von der Grenzfläche ein zu dieser paralleler unendlich dünner gerader Leiter, welcher von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird, im Medium 2 befindet sich spiegelbildlich dazu ein unendlich dünner gerader Leiter, welcher in der gleichen Richtung von einem zeitlich konstanten Strom I_2 durchflossen wird (siehe Abbildung).



(a) Schreibe für die magnetische Feldstärke $\vec{B}$ die Feldgleichungen in den Raumgebieten $G_1 : x > 0$ und $G_2 : x < 0$, die Anschlußbedingungen für $x = 0$ sowie die asymptotische Bedingung an.

(b) Löse die Aufgabenstellung von (a) mit Hilfe von Bildstromansätzen.

Lösung:

(a) Aus Symmetriegründen muss man argumentieren, dass für $x > 0$ im Bereich G_1 gilt

$$\mathrm{div}\vec{B}(x,y) = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_1 I_1 \delta(x-d)\delta(y)\vec{e}_z\,. \tag{7}$$

Genauso finden wir für $x < 0$ im Bereich G_2, dass

$$\mathrm{div}\vec{B}(x,y) = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_2 I_2 \delta(x+d)\delta(y)\vec{e}_z\,. \tag{8}$$

Die Anschlußbedingungen bei $x = 0$ sind die Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{B}$ und der Tangentialkomponente von $\vec{H}$. Die asymptotische Bedingung für $\vec{B}$ ist, dass

$$\lim_{R\to\infty} \vec{B}(x,y) \to 0\,, \quad \text{für} \quad R = \sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{9}$$

(b) Im Raum G_1 mit $x > 0$ nimmt man folgendes Ersatzproblem an: Der gesamte Raum habe Permeabilität μ_1 (statt μ_2 für $x < 0$), und es fließe der Strom I_1' (statt I_2) durch den Leiter bei $x = -d, y = 0$. Genauso nimmt man im Raum G_2 mit $x < 0$ an, dass der gesamte Raum Permeabilität μ_2 hat und der Strom bei $x = d, y = 0$ I_2' sei (anstatt I_1). Dies führt zu

$$I_1' = \frac{(-\mu_1 + \mu_2)I_1 + 2\mu_2 I_2}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{10}$$

und

$$I_2' = \frac{2\mu_1 I_1 + (\mu_1 - \mu_2)I_2}{\mu_1 + \mu_2}. \tag{11}$$

3. **Permanent magnetisierter Zylinder**
Ein unendlich langer permanent magnetisierter Zylinder mit dem Radius a und der z-Achse als Zylinderachse besitzt die Magnetisierung

$$\vec{M}(r, \varphi, z) = M_0 \frac{r^2}{a^2} \vec{e}_\varphi, \qquad M_0 > 0, \tag{12}$$

wobei (r, φ, z) Zylinderkoordinaten sind.

(a) Berechne die Magnetisierungsstromdichte $\vec{j}_M$ in Inneren des Zylinders und die Magnetisierungs-Flächenstromdichte $\vec{k}_M$ auf dem Zylindermantel sowie den in z-Richtung fließenden Gesamtstrom.

(b) Berechne im gesamten Raum das vom magnetisierten Zylinder verursachte $\vec{B}$-Feld. Gib ferner für den gesamten Raum das zugehörige $\vec{H}$-Feld an.

Hinweis: Verwende die Integralform des Oerstedschen Gesetzes.

Lösung:

(a) Die Magnetisierungsstromdichte ist

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = 3M_0 c \frac{r}{a^2} \vec{e}_z, \tag{13}$$

und die Magnetisierungs-Flächenstromdichte

$$\vec{k}_M = -M_0 c \vec{e}_z. \tag{14}$$

Der Gesamtstrom in z-Richtung ist gegeben durch $I = 0$.

(b) Aus Symmetriegründen gilt $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$. Für $r > a$ führt dies zu $\vec{B}(\vec{r}) = 0$ und für $r < a$ zu $B_\varphi(r) = 4\pi M_\varphi(r)$. Somit folgt im Innen- und Außenraum, dass $\vec{H}(\vec{r}) = 0$.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a, 2b, 3ab