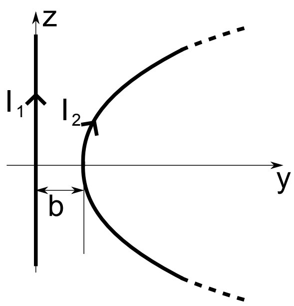
# Übungsblatt 8

für das Tutorium am 29.05.2015

1. **Kraft zwischen Strömen in parabelförmiger Leiterschleife und geradem Stromleiter**

   (a) Entlang der $z$-Achse fließe der Strom $I_1$. Berechne das dazugehörige Magnetfeld und gib es in kartesischen Koordinaten an.

   (b) In der $yz$-Ebene liege eine unendlich lange, parabelförmige Leiterschleife, die durch $y = az^2 + b$ parametrisiert ist (siehe Skizze) und in der ein Strom der Stärke $I_2$ fließt. Berechne die auf die Leiterschleife wirkende Gesamtkraft.




*Lösung:*

(a) Aus Symmetriegründen kann man die Form des $\vec{B}$-Feldes stark einschränken und in kartesischen Koordinaten ergibt sich die Lösung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2I_1}{c}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(b) In der $x = 0$ Ebene gilt $\vec{B}|_{x=0} = -\frac{2I_1}{c}\frac{1}{y}\vec{e}_x$. Die parabelförmige Leiterschleife ist parametrisiert durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ az^2+b \\ z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2azdz \\ dz \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Aus dem Ampere'schen Gesetz folgt dann die Gesamtkraft

$$\vec{F} \;=\; -\frac{2I_1 I_2 \pi}{c^2\sqrt{ab}}\vec{e}_y \, . \tag{3}$$

2. **Plattenkondensator mit zwei Medien**

   Ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator zwischen $z = -b$ und $z = +a$ sei mit zwei Sorten eines leitfähigen Mediums gefüllt, sodass bei positivem (negativem) $z$ Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_\pm$ und spezifische Leitfähigkeitskonstanten $\sigma_\pm$ vorliegen. Der Plattenkondensator sei auf konstanter Spannung gehalten, sodass

sich ein stationärer Zustand mit konstantem Stromfluß einstellt. Leite für diesen stationären Zustand aus der Kontinuitätsgleichung die Anschlussbedingungen für die $\vec{E}$- und $\vec{D}$-Felder her und berechne dann an den Grenzflächen bei $z = 0$ die freie Oberflächenladungsdichte $\sigma_f$ und die Polarisationsflächenladungsdichte $\sigma_P$ als
(a) Funktion der Stromdichte und
(b) als Funktion der angelegten Spannung.

*Lösung:*

Wegen der Symmetrien des Problems zeigen $\vec{E}, \vec{D}$ und $\vec{P}$ alle in die $z$-Richtung und wir definieren $\vec{E} = E\vec{e}_z$, $\vec{D} = D\vec{e}_z$ und $\vec{P} = P\vec{e}_z$. Da wir einen stationären Zustand haben, ist die Stromdichte $\vec{j}_f = j_f\vec{e}_z = const$. Aus der Kontinuitätsgleichung und der Anschlußbedingung für das $\vec{D}$-Feld finden wir die freie Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_f = \left(\frac{\epsilon_+}{\sigma_+} - \frac{\epsilon_-}{\sigma_-}\right)\frac{j_f}{4\pi}\,. \tag{4}$$

Genauso folgt die Polarisationsflächenladungsdichte aus der Anschlußbedingung für das $\vec{P}$-Feld

$$\sigma_P = \left(\frac{\epsilon_- - 1}{\sigma_-} - \frac{\epsilon_+ - 1}{\sigma_+}\right)\frac{j_f}{4\pi}\,.$$

Um die Stromdichte durch die Spannung auszudrücken, müssen wir das Potential bestimmen. Wir machen den Ansatz $\phi_+ = c_+z + d$ für $z > 0$ und $\phi_- = c_-z + d$ für $z < 0$. Dieser Ansatz erfüllt die Stetigkeitsbedingung $\phi_+(0) = \phi_-(0)$. Die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist

$$U = \phi_+(a) - \phi_-(-b)\,, \tag{5}$$

was zusammen mit den Anschlußbedingungen ergibt, dass

$$c_+ = \frac{U}{a + \frac{\sigma_+}{\sigma_-}b}\,, \qquad c_- = \frac{U}{a\frac{\sigma_-}{\sigma_+} + b}\,. \tag{6}$$

Somit sind $\sigma_f$ and $\sigma_P$ als Funktionen von $U$

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi}\frac{\epsilon_-\sigma_+ - \epsilon_+\sigma_-}{a\sigma_- + b\sigma_+}U\,, \tag{7}$$

$$\sigma_P = \frac{1}{4\pi}\frac{(\epsilon_+ - 1)\sigma_- - (\epsilon_- - 1)\sigma_+}{a\sigma_- + b\sigma_+}U\,. \tag{8}$$

3. **Elektron im magnetischen und elektrischen Feld**

Betrachte die Bewegung eines geladenen Teilchens mit der Masse $m$ und der Ladung $q$ in einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ und einem elektrischen Feld, das zeitabhängig ist:

$$\vec{E}(t) = E_0\left(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y\right)\,. \tag{9}$$

Wir vernachlässigen das zeitabhängige magnetische Feld und lösen die Bewegungsgleichungen für das Teilchen.

(a) Zeige, dass die zweiten Ableitungen der $x$ und $y$ Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$, also $\frac{d^2v_x}{dt^2}$ und $\frac{d^2v_y}{dt^2}$ entkoppelte Differentialgleichungen erfüllen. Löse diese Differentialgleichungen für $\omega = \frac{qB_0}{mc}$. Nimm an, dass das Teilchen zur Zeit $t = 0$ am Ursprung sitzt und verschwindende Geschwindigkeit $v_x(0) = v_y(0) = 0$ hat. Bestimme $x(t)$ und $y(t)$.

(b) Benutze den Lösungsansatz

$$x(t) = A\cos(wt) + tB\sin(wt) + C\,, \qquad y(t) = D\sin(wt) + tE\cos(wt)\,, \tag{10}$$

und löse die Differentialgleichungen für $\omega = -\frac{qB_0}{mc}$ für ein Teilchen, das zur Zeit $t = 0$ am Ursprung sitzt und verschwindende Geschwindigkeit $v_x(0) = v_y(0) = 0$ hat.

*Lösung:*

(a) Von

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{11}$$

finden wir die gekoppelten Differenzialgleichungen

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}\left(E_0\cos(wt) + \frac{v_y}{c}B_0\right)\,, \tag{12}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m}\left(E_0\sin(wt) - \frac{v_x}{c}B_0\right)\,. \tag{13}$$

Nochmaliges Ableiten und einsetzen der obigen Gleichungen führt zu den entkoppelten Gleichungen

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_0}{mc}\right)^2 v_x + \frac{qE_0}{m}\sin(wt)\left(-w + \frac{qB_0}{mc}\right)\,, \tag{14}$$

und

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB_0}{mc}\right)^2 v_y + \frac{qE_0}{m}\cos(wt)\left(w - \frac{qB_0}{mc}\right)\,. \tag{15}$$

Für $\omega = \frac{qB_0}{mc}$ ergibt sich somit

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x\,, \tag{16}$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y\,. \tag{17}$$

Die Lösung, die alle Gleichungen und die Anfangsbedingungen erfüllt ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{qE_0}{\omega^2 m}\left(1 - \cos(\omega t)\right)\,, \\ y(t) &= 0\,. \end{aligned} \tag{18}$$

(b) Für $\omega = -\frac{qB_0}{mc}$ findet man

$$x(t) = \frac{qE_0}{\omega^2 m}\left(\cos(\omega t) + t\omega\sin(\omega t) - 1\right)\,, \tag{19}$$

$$y(t) = \frac{qE_0}{\omega^2 m}\left(\sin(\omega t) - t\omega\cos(\omega t)\right)\,. \tag{20}$$

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 3a, 3b