Lösungen zu Übungsblatt 9

1. **Kugelwelle**

   (a) Wir drücken $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten aus und berechnen $\vec{B}$ und $\vec{E}$ mithilfe des Rotors in Kugelkoordinaten.

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \left(-ik + \frac{1}{r}\right) \frac{C}{r} \sin\theta e^{i(kr-\omega t)} \tag{1}$$

$$E_r = \frac{2c}{i\omega} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{C}{r} \cos\theta e^{i(kr-\omega t)} \tag{2}$$

$$E_\theta = \frac{c}{i\omega} \left(k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{C}{r} \sin\theta e^{i(kr-\omega t)} \tag{3}$$

$$E_\varphi = 0. \tag{4}$$

   (b) Wir berücksichtigen nur die führenden Terme:

$$\vec{B}^{r\gg\lambda} = -ik \sin\theta \frac{C}{r} e^{i(kr-\omega t)} \vec{e}_\varphi \tag{5}$$

$$\vec{E}^{r\gg\lambda} = -ik \sin\theta \frac{C}{r} e^{i(kr-\omega t)} \vec{e}_\theta. \tag{6}$$

   (c) Zur Berechnung des Poyntingvektors müssen wir die *Realteile* der Felder verwenden. In der Fernfeldnäherung erhalten wir dann

$$\vec{S} = \frac{k\omega}{4\pi} \sin^2\theta \left(\frac{C}{r}\right)^2 \sin^2(kr-\omega t) \vec{e}_r. \tag{7}$$

   Mit $\langle \sin^2(kr-\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$ berechnen wir

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = r^2 \langle \vec{S}\rangle \vec{e}_r = \frac{k\omega}{8\pi} C^2 \sin^2\theta. \tag{8}$$

   Das Abstrahlungsprofil in Abhängigkeit von θ hat folgende Form:

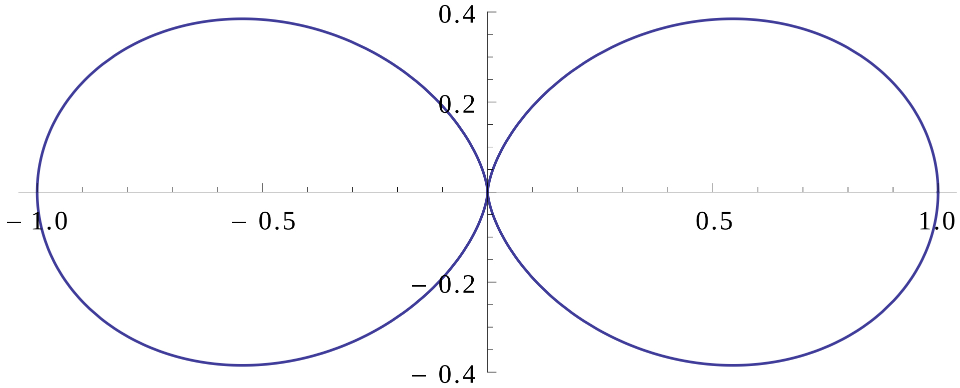

Abbildung 1: Der Energiefluss einer Kugelwelle ist nicht isotrop.

In Elektrodynamik 2 werden wir lernen, dass das der Abstrahlung eines Dipols entspricht, der in $\pm\vec{e}_z$-Richtung oszilliert.

(d)
$$P = \frac{k\omega C^2}{3}. \tag{9}$$

2. **Bewegter Stab**

(a) Der Stab ist in S in der y-Richtung längenkontrahiert. Die Ruhelänge ist daher
$$L_0 = L\sqrt{\frac{6}{5}}. \tag{10}$$

(b) Ja, es gibt so ein S'. Um V zu berechnen transformieren wie die Raum-Zeit-Koordinaten von Stabanfang und -ende nach S' (S' ist in “Standardkonfiguration” zu S: es bewegt sich mit Geschwindigkeit V in positive x-Richtung.) und fordern, dass sie dieselbe y'-Komponente haben. Daraus folgt
$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}c. \tag{11}$$

(c) Die Länge kann zu jedem Zeitpukt t' (einfach: $t' = 0$) gemessen werden:
$$L' = \frac{\sqrt{3}}{4}L. \tag{12}$$

Die Geschwindikeit lässt sich am einfachsten aus dem Ortsvektor des Stabanfangs $\vec{r}'_A(t') = \vec{v}'t'$ ablesen:
$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}c \\ \frac{c}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

3. **Lichtuhren**

(a) Sei $t_0 = \frac{2L}{c}$ der zeitliche Abstand von zwei Ticks einer ruhenden Uhr. Die Zeit t'_0 der bewegten Uhr kann man mit dem Satz von Pythagoras bestimmen, siehe Abbildung:

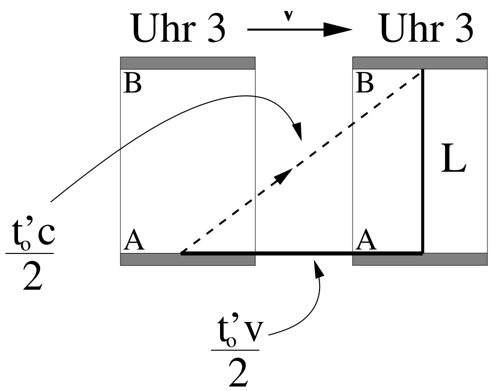

Abbildung 2: Die Uhr bewegt sich während das Licht zwischen den Spiegeln läuft.

Daraus ergibt sich

$$t'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t_0 = \gamma t_0. \tag{14}$$

Da $\gamma > 1$ ist $t'_0 > t_0$. Die bewegte Uhr scheint also im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 langsamer zu gehen.

(b) Sei L' der Spiegelabstand in Uhr 3 im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2. Die Laufzeiten t'_1 und t'_2 von Spiegel A nach B und zurück sind

$$t'_1 = \frac{L'}{c - v} \qquad t'_2 = \frac{L'}{c + v}. \tag{15}$$

Aus der Gesamtlaufzeit $t'_0 = t'_1 + t'_2$ und dem Ergebnis aus Aufgabe (a) folgt

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L = \frac{L}{\gamma}. \tag{16}$$

Der Abstand zwischen den beiden Spiegeln der Uhr 3 erscheint im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 also verkleinert. Das ist die Längenkontraktion.