

Übungsblatt 10

für das Tutorium am 26.06.2015

1. Raketenzwillinge

Ein Raumschiff startet zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Erde und kehrt zum Zeitpunkt $t = 4T$ auf die Erde zurück. Von einem Inertialsystem auf der Erde aus betrachtet ist die Flugbahn des Raumschiffs gegeben durch:

$$0 \leq t \leq T : \quad x(t) = at^2 \quad (1)$$

$$T \leq t \leq 3T : \quad x(t) = 2aT^2 - a(t - 2T)^2 \quad (2)$$

$$3T \leq t \leq 4T : \quad x(t) = a(4T - t)^2 \quad (3)$$

- Stelle die Bewegung in einem Raum-Zeit-Diagramm dar und diskutiere den Bewegungsablauf.
- Berechne die Flugdauer wie sie an Bord des Raumschiffs gemessen wird.
- Zahlenbeispiel: Wie lange ist die Flugdauer an Bord des Raumschiffs, wenn die Beschleunigung der Erdbeschleunigung entspricht ($a = 9.81m/s^2$) und der Flug von der Erde aus betrachtet 16 Wochen dauert? Kann man beliebige Werte für a und T wählen? Wenn nein, gibt es eine maximale Zeitdauer T für den Flug bei der gegebenen Beschleunigung?

2. Relativistischer Ruck

Der Ruck (engl: *jerk*) ist definiert als die Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit: $\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt}$. Analog zu Viererbeschleunigung und Vierergeschwindigkeit definiert man den Viererruck als¹

$$j^\mu = \frac{da^\mu}{d\tau}. \quad (4)$$

- Drücke die Komponenten des Viererrucks durch Dreiergeschwindigkeit \vec{v} , Dreierbeschleunigung \vec{a} und Dreierruck \vec{j} aus.
- Berechne $j^\mu u_\mu$ und zeige, dass der Viererruck im momentanen Ruhesystem ($\vec{v} = \vec{0}$) nicht raumartig sein muss.
- Definiere einen modifizierten Viererruck als

$$J^\mu := j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Bestimme die Konstante α aus der Bedingung $J^\mu u_\mu = 0$ und zeige im momentanen Ruhesystem $\vec{v} = \vec{0}$, dass J^μ raumartig ist².

¹Verwechslungsgefahr: Der Viererstrom j^μ in der relativistischen Elektrodynamik wird typischerweise mit demselben Symbol bezeichnet.

²Damit hat J^μ dieselbe Eigenschaft wie die Viererbeschleunigung, für die gilt: $a^\mu u_\mu = 0$ und a^μ ist raumartig.

3. Paarvernichtungsprozess

Man betrachte den Paarvernichtungsprozess zwischen einem Elektron e^- und einem Positron e^+ . Dabei entstehen zwei Photonen γ_1 und γ_2 (siehe Abbildung 1).

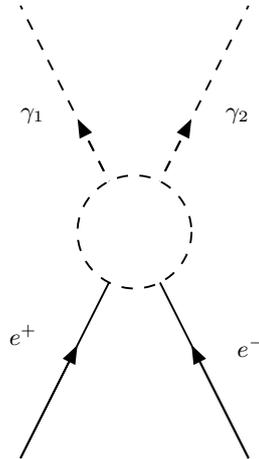


Abbildung 1: Paarvernichtung zwischen Elektron und Positron.

Im Laborsystem S ruhe das Elektron. Das Positron habe die kinetische Energie T .

- (a) Leite einen Ausdruck für die Energien der beiden Photonen in S ab.
Hinweis: Neben der Ruhemasse m des Elektrons bzw. Positrons und der kinetischen Energie T des Positrons hängt die Energie eines der Photonen nur vom Winkel θ zwischen der Flugrichtung des annihilierten Positrons und der Ausbreitungsrichtung des Photons ab.
- (b) Berechne die minimale und maximale Photonenenergie (also die Energie *eines* Photons) in S bei vorgegebener kinetischer Energie T des Positrons, ausgedrückt durch m und T . Überprüfe, dass in diesen Fällen Energieerhaltung und Impulserhaltung erfüllt sind.

Ankreuzbar: 1abc, 2a, 2bc, 3a, 3b