

# Übungsblatt 2

für das Tutorium am 20.03.2015

## 1. Krummlinige Koordinaten

Berechne  $\vec{\nabla}R$  und  $\Delta R$  mit  $R = |\vec{R}|$ , wobei  $\vec{R} = (x, y, z)$ , in kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten.

## 2. Monopole und elektrisch-magnetische Dualität

- (a) Betrachte die Maxwellgleichungen im Vakuum ohne äussere Quellen (in Gauß-Einheiten). Zeige, dass die Gleichungen invariant unter elektrisch-magnetischer Dualität  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$  sind. Gilt die Dualität auch noch in Anwesenheit von Quellen?
- (b) Nimm nun an, dass neben elektrischen Ladungen und Strömen  $(\rho_e, \vec{j}_e)$  auch noch magnetische Ladungen und Ströme  $(\rho_m, \vec{j}_m)$  existieren<sup>1</sup>, die sich analog zu den elektrischen Größen verhalten. Wie sehen die Maxwellgleichungen in diesem Fall aus?
- (c) Zeige, dass die Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen invariant unter einer allgemeineren Version der elektrisch-magnetischen Dualität sind, wo Felder und Quellen in Linearkombinationen derselben transformieren. Wie sehen die Transformationseigenschaften der Felder und Quellen aus?  
*Hinweis:* Es geht allgemeiner als nur der Austausch der Feldstärken: Führe eine Winkelvariable  $\xi$  ein. Dann transformiert zum Beispiel das elektrische Feld als  $\vec{E}' = \vec{E} \cos \xi - \vec{B} \sin \xi$ . Wie sehen die Transformationen der anderen Größen aus? Was bedeuten die Spezialfälle  $\xi = 0$  und  $\xi = \frac{\pi}{2}$ ?
- (d) Zeige, dass die Energiedichte und die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes invariant unter der Dualitätstransformation sind.

## 3. Punktladungen

Betrachte zwei Punktladungen  $q_1$  und  $q_2$  an  $z = \pm a$  und  $x = y = 0$ .

- (a) Bestimme die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  und die Gesamtladung.
- (b) Bestimme das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  zunächst für beliebiges  $\vec{r}$ . Was ist das Feld an  $\vec{r} = (0, y, 0)$  für  $q_1 = q_2$  und  $q_1 = -q_2$ ?
- (c) Verwende den Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik um die Kraft von  $q_1$  auf  $q_2$  für den Fall  $q_1 = q_2 = q$  als Oberflächenintegral des Maxwell'schen Spannungstensors entlang der Symmetrieebene  $z = 0$  auszurechnen.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2cd, 3ab, 3c

---

<sup>1</sup>Magnetische Monopole sind in der Natur noch nicht beobachtet worden. Sie spielen jedoch in Theorien jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik, z.B. in der Stringtheorie, eine wichtige Rolle.