

# Übungsblatt 5

für das Tutorium am 08.05.2015

## 1. Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome können mit Hilfe der Formel von Rodrigues berechnet werden:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (1)$$

- (a) Verwende die Formel von Rodrigues um zu zeigen, dass

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (2)$$

*Hinweis:*

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{1+2n}}{(2n+1)!}. \quad (3)$$

- (b) Berechne mit Hilfe der Formel von Rodrigues das fünfte Legendre-Polynom.  
 (c) Die Legendre-Polynome haben die erzeugende Funktion

$$g(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \quad (4)$$

Berechne damit das fünfte Legendre-Polynom.

*Hinweis:*

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = \dots - \frac{5y^3}{16} + \frac{35y^4}{128} - \frac{63y^5}{256} + \dots$$

## 2. Punktdipol und Punktladung

Ein Punktdipol  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  befinde sich am Koordinatenursprung. Eine Punktladung  $q$  befinde sich an  $\vec{r}_1 = (0, y_1, 0)$ .

- (a) Berechne die Kraft, die das Feld des Dipols auf die Ladung ausübt. Welche Kraft wirkt auf den Dipol?  
 (b) Wieviel Arbeit benötigt man um die Ladung von  $\vec{r}_1 = (0, y_1, 0)$  ins Unendliche (in  $y$ -Richtung) zu verschieben, wenn der Dipol im Ursprung festgehalten wird. Wieviel Arbeit benötigt man um den Dipol bei festgehaltener Punktladung ins Unendliche zu verschieben?  
 (c) Wir bewegen nun die Punktladung nach  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Wieviel Arbeit ist nötig um die Ladung dorthin zu bewegen? Welche Kraft wirkt auf die Punktladung an  $\vec{r}_2$ ?

## 3. Multipolmomente geladener rotationssymmetrischer Ellipsoide

Gegeben sei ein bezüglich der  $z$ -Achse rotationssymmetrischer Ellipsoid mit Hauptachsen  $a = b, c$ . Das Ellipsoid sei für  $z > 0$  positiv und für  $z < 0$  negativ mit Raumladungsdichte  $\pm\rho_0$  geladen. Berechne die elektrostatischen sphärischen Multipolmomente  $q_{lm}$  mit  $l \leq 2$  und schreibe das elektrostatische Potentiale in der entsprechenden Näherung für  $r > \max(a, c)$  an.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2ab, 2c, 3