

1. Tutorium

für 11.03.2016

1.1 Index-Schreibweise

a) Bestimme Divergenz und Rotation des Vektorfeldes

$$v^i(x^m) = g(x^m x^m) x^i$$

(beachte, dass $g(x^m x^m)$ eine zusammengesetzte Funktion aus $x^m \mapsto x^m x^m$ und $g : x \mapsto g(x)$ ist.) Skizziere die Form des Vektorfeldes. Bestimme unter der Annahme, dass $f(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist, ein Skalarfeld $F(x^m)$, dessen Gradient $v^i(x^m)$ ergibt.

b) Folgendes Vektorfeld sei gegeben

$$v^i(x^m) = f(x)u(y)e_y^i + g(x)v(y)e_x^i.$$

Bestimme die Bedingung für verschwindende Rotation. Zeige, dass $v^i(x)$ in diesem Fall ein Gradientenfeld ist.

1.2 Vektorfelder

a) Zeichne folgende Vektorfelder in der x/y -Ebene an den Schnittpunkten der Geraden von $x = 1, 2, 3$ und $y = 1, 2, 3$ (also 9 Vektoren)

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{y}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und berechne die Rotation und die Divergenz für beide Felder.

b) Schreibe das wirbelfreie Feld als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(x, y, z)$. Ist ϕ eindeutig gegeben? Wie schaut die allgemeine Lösung aus?

c) Schreibe das divergenzfreie Feld als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} . Suche eine Lösung $\vec{A}_1 = (0, 0, ?)$ bei der die x - und y -Komponenten verschwinden. Suche eine weitere Lösung $\vec{A}_2 = (?, ?, 0)$ bei der die z -Komponente verschwindet. Wie lautet die Rotation der Differenz der beiden Lösungen $\text{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)$? Wie könnte man daher die allgemeine Lösung für \vec{A} anschreiben?

1.3 Divergenz

Die koordinatenfreie Darstellung der Divergenz ist gegeben durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}.$$

Berechne die Divergenz von $F^i = p^j x^j p^i$ am Ursprung, mit konstantem p^i , auf drei Arten:

- a) durch Bilden der entsprechenden Ableitungen direkt in kartesischen Koordinaten,
 - b) durch Berechnung des Oberflächenintegrals, wobei die Oberfläche S durch einen Würfel mit Kantenlänge r gegeben ist.
 - c) durch Berechnung des Oberflächenintegrals, wobei die Oberfläche S durch eine Kugel mit Radius r gegeben ist. (Hierbei darf die Richtung von p^i für Kugelkoordinaten günstig gewählt werden.)
-

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2abc, 3ab, 3c