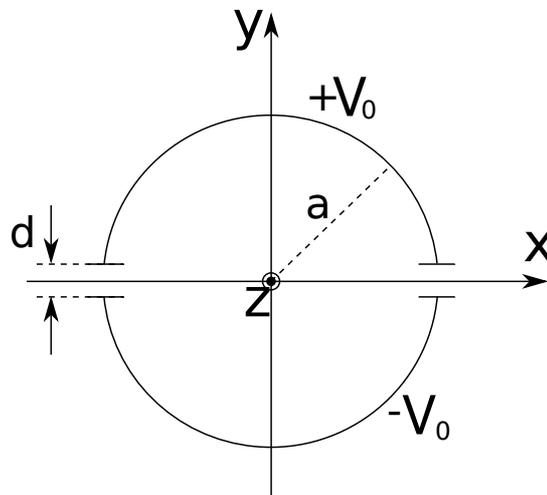


9. Tutorium

für 03.06.2016

9.1 Geteilter Kreiszyylinder

Ein unendlich langer unendlich dünnwandiger leitender Kreiszyylinder mit dem Radius a ist durch einen Schnitt längs seiner Achse in zwei Hälften geteilt, welche voneinander durch einen schmalen Spalt der Breite d , $d \ll a$, isoliert sind und auf den Potenzialen $+V_0$ bzw. $-V_0$ gehalten werden (siehe Abbildung).



- Berechne das elektrostatische Potenzial $V(r, \phi)$ für $r < a$ und $r > a$.
- Berechne die Flächenladungsdichte $\sigma(\phi)$ auf dem leitenden Zylinder.
- Berechne die Ladung pro Längeneinheit auf den Kreiszyylinderhälften sowie die Kapazität dieser Anordnung pro Längeneinheit.

Anleitung: Der Spalt soll nur bei Punkt (c) berücksichtigt werden, bei den Punkten (a) und (b) soll er ignoriert werden. Als Ansatz im Inneren kann verwendet werden $V(r, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi] \left(\frac{r}{a}\right)^m$.

Verwende ferner die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\phi}{2n+1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p \sin \phi}{1-p^2}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad p^2 \leq 1.$$

Bei Punkt (c) soll der führende Term der Kapazität angegeben werden (Winkelfunktionen im Ergebnis für $d \ll a$ entwickeln).

9.2 Legendrepolynome

a) Berechne die ersten vier Legendrepolynome mit der Formel von Rodriguez:

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (1)$$

b) Die Legendrepolynome haben die erzeugende Funktion

$$g(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad (2)$$

Berechne damit die ersten vier Legendrepolynome.

c) Verwende die Formel von Rodriguez um die Orthogonalität der Legendrepolynome zu zeigen

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (3)$$

Hinweis:

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{1+2n}}{(2n+1)!} \quad (4)$$

9.3 Multipolmomente eines Ellipsoids

Gegeben sei ein bezüglich der z -Achse rotationssymmetrisches Ellipsoid mit Hauptachsen $a = b, c$. Das Ellipsoid sei homogen mit Raumladungsdichte ρ_0 geladen. Berechne hierfür die elektrostatischen sphärischen Multipolmomente q_{lm} mit $l \leq 2$ und schreibe das elektrostatische Potenzial in der entsprechenden Näherung für $r > \max(a, c)$ an.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2ab, 2c, 3