Übungsblatt 1

für das Tutorium am 10.03.2017

1. **Vierervektoren**
Gegeben seien Lorentztransformation in x-Richtung $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)$, in z-Richtung $\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')$, sowie Drehungen $D^\mu{}_\nu(\alpha)$ und $D'^\mu{}_\nu(\alpha')$ um die x- und z-Achse:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & -\beta'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix},$$

$$D^\mu{}_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D'^\mu{}_\nu(\alpha') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & -\sin\alpha' & 0 \\ 0 & \sin\alpha' & \cos\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie ein Vierervektor $x^\mu = (ct, x, y, z)$.

(a) Zeige, dass im Allgemeinen Lorentztransformationen in x- und z-Richtung nicht kommutieren.

(b) Zeige, dass im Allgemeinen die Lorentztransformation in x-Richtung nicht mit einer Drehung um die z-Achse kommutiert.

(c) Kommutieren im Allgemeinen Elemente der Drehgruppe SO(3)?

(d) Kommutieren im Allgemeinen Elemente der Drehgruppe SO(2)?

(e) Um welche Achse müsste man eine Drehung ansetzen, damit diese stets mit einer Lorentztransformation in x-Richtung kommutiert?

Lösung:
Man kann alle Aufgabenteile durch explizites nachrechnen lösen. Z.B. für (a) berechnen wir $\Lambda^\mu{}_\tau(\beta)\Lambda'^\tau{}_\nu(\beta)$ und $\Lambda'^\mu{}_\tau(\beta)\Lambda^\tau{}_\nu(\beta)$ und finden, dass sie nicht identisch sind. Für Teil (e) finden wir, dass eine Drehung um die x-Achse mit einer Lorentztransformation in x-Richtung kommutiert.

2. **Bewegter Stab**
Ein Stab befindet sich in einem Intertialsystem S in der xy-Ebene und bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}c$ in y-Richtung. Die Länge des Stabes in S ist L und der Stab sei so ausgerichtet, dass er mit der x-Achse einen Winkel α einschliesst (siehe Abbildung 1).

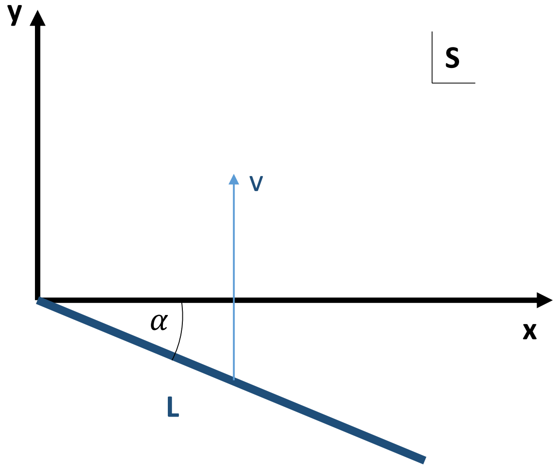

Abbildung 1: Stab in S zum Zeitpunkt $t = 0$.

(a) Wie groß ist die Ruhelänge L_0 des Stabes für $\alpha = 30°$?

(b) Gibt es für $\alpha = 45°$ ein Inertialsystem S', das sich mit Geschwindigkeit V relativ zur x-Richtung bewegt, in dem der Stab parallel zur x'-Achse ist? Wie groß ist V?

(c) Gibt es für $\alpha = 30°$ein Inertialsystem S', das sich mit Geschwindigkeit V relativ zur x-Richtung bewegt, in dem der Stab parallel zur x'-Achse ist? Wie groß ist V?

(d) Welche Länge L' besitzt der Stab in S' aus Teil (c)? Was ist seine Geschwindigkeit $\vec{v}'$?

Lösung:

(a) Man kann den Anfangs- und Endpunkt des Stabes in S zur Zeit $t = 0$ bestimmen und diese Punkte dann mit einer Lorentztransformation ins Ruhesystem transformieren. Dann findet man die Ruhelänge

$$L_0 = L\sqrt{\frac{6}{5}}\,. \tag{1}$$

Dies folgt auch direkt aus der Längenkontraktion in Bewegungsrichtung.

(b) Die Teile (b) und (c) sind sehr ähnlich und wir können mit einem allgemeinen Winkel α arbeiten. Wir bestimmen zuerst die Koordinaten des Anfangs (A) und des Endes (E) des Stabes für beliebige Zeiten t. Dann transformieren wir auf ein System S', das sich mit Geschwindigkeit V in x-Richtung bewegt. Wir können dann jeweils den ersten Eintrag des Vierervektors verwenden um t durch t' auszudrücken und die Ortsvektoren $\vec{r}_A(t')$ und $\vec{r}_E(t')$ zu bestimmen. Die Bedingung, dass der Stab parallel zur x'-Achse ist, bedeutet, dass $y'_A(t') = y'_E(t')$. Wir verlangen also, dass die y'-Komponenten des Stabanfanges und -endes *zur gleichen Zeit* t' identisch sind.
Lösen von $y'_A(t') = y'_E(t')$ für $\alpha = 45°$ ergibt $V > c$ und somit einen Widerspruch.

(c) Lösen von $y'_A(t') = y'_E(t')$ für $\alpha = 30°$ ergibt $V < c$ und somit existiert so ein Bezugssystem.

(d) Die Länge des Stabes kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt t' gemessen werden. Wir wählen $t' = 0$ und finden die verkürzte Länge

$$L' = |\vec{r}'_E(0) - \vec{r}'_A(0)| = \dots . \tag{2}$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}'_A = \vec{v}'_E$ des Stabes lässt sich aus $\vec{r}'_A(t') = \vec{v}'t'$ ablesen.

3. **Spaß mit Einheiten**

(a) Schreibe die Minkowski Metrik in 'Schiffseinheiten', $\eta_{\mu\nu} = diag(c_0^2, -c_1^2, -c_2^2, -c_3^2)$, so dass das entsprechende Linienelement die Form $ds^2 = c_0^2 dt^2 - c_1^2 dx^2 - c_2^2 dy^2 - c_3^2 dz^2$ annimmt. Bestimmen Sie c_0, c_1, c_2 und c_3 unter den folgenden Voraussetzungen: das Linienelement ds wird in Yard gemessen, die Zeit wird in Sekunden gemessen, die Entfernung des Schiffes vom Ufer in Bewegungsrichtung in Knoten mal Stunden (x-Komponente), die Entfernung des Schiffes vom Ufer senkrecht zur Bewegungsrichtung in Seemeilen (y-Komponente) und die Höhe des Schiffes (z-Komponente) in Metern.

Hinweise: 1 Yard = 0.9144 Meter, 1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde, 1 Sekunde = 299792458 Meter/Lichtgeschwindigkeit, 1 Seemeile = 1852 Meter.

(b) Von nun an setzen wir $c = 1$ wie in der Vorlesung (bzw. alle $c_\mu = 1$ in der Minkowski Metrik oben), um uns das Leben zu erleichtern.
Bestimme deine Größe in Sekunden, dein Alter in Metern und deine Ruheenergie in Kilogramm.
Die Polizei stoppt dein Auto auf der Autobahn (Geschwindigkeitsbeschränkung $v \leq 130 km/h$) mit einer Geschwindigkeit von $v = 10^{-7}$. Warst du zu schnell unterwegs?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{299792458m}{1s}\frac{1Yard}{.9144m} \approx 3.28 \times 10^8 \frac{Yard}{s}\,, \\
c_1 &= \frac{1852m}{1Knoten \cdot h}\frac{1Yard}{.9144m} = \frac{1852m}{1Seemeile}\frac{1Yard}{.9144m} = 2025.37\frac{Yard}{Knoten \cdot h}\,, \\
c_2 &= \frac{1852m}{1Seemeile}\frac{1Yard}{.9144m} = 2025.37\frac{Yard}{Seemeilen}\,, \\
c_3 &= \frac{1Yard}{.9144m} = 1.09361\frac{Yard}{m}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

(b) Alles sehr einfach. Du warst nicht zu schnell unterwegs.

Ankreuzbar: 1ab, 1cde, 2ab, 2cd, 3ab