Übungsblatt 2

für das Tutorium am 17.03.2017

1. **Lichtuhren**
Zwischen zwei parallelen Spiegeln A und B mit Abstand L bewege sich ein Lichtblitz hin und her. Diese "Uhr" ticke bei jedem Auftreffen des Lichtblitzes auf den Spiegel A, was durch einen Zähler registriert werde. Es seien nun zwei solcher Uhren synchronisiert und in einem festen Abstand von einander aufgestellt. Eine dritte bewege sich dazu mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v wie in Abbildung 1 dargestellt. Die Zeitmessungen finden statt, wenn Uhr 3 mit Uhr 1 bzw. Uhr 2 überlappt. Führe die Diskussion im Ruhesystem von den Uhren 1 und 2.

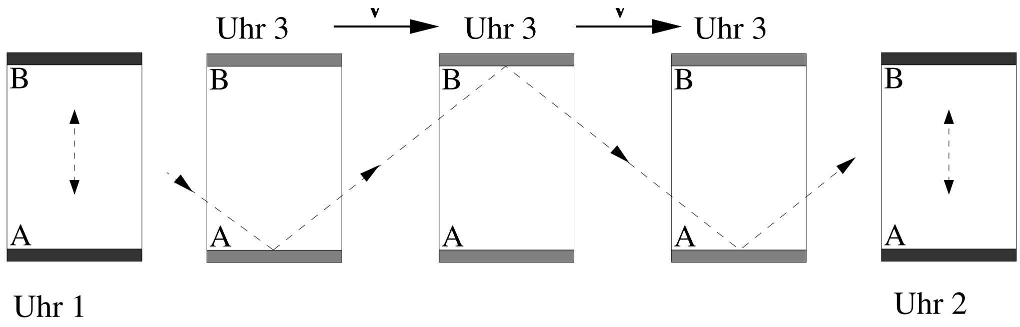


Abbildung 1: Bewegte Uhr zwischen zwei festen Uhren.

(a) Berechne mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Faktor, um den die bewegte Uhr langsamer geht als die beiden ruhenden.

(b) Es sei der Versuchsaufbau wie in Aufgabe (a) gegeben mit dem Unterschied, dass nun die sich bewegende dritte Uhr um 90° so gedreht ist, dass die Bewegungsrichtung der Uhr parallel zum Laufweg des Lichtblitzes in ihrem Innern ist (siehe Abbildung 2).

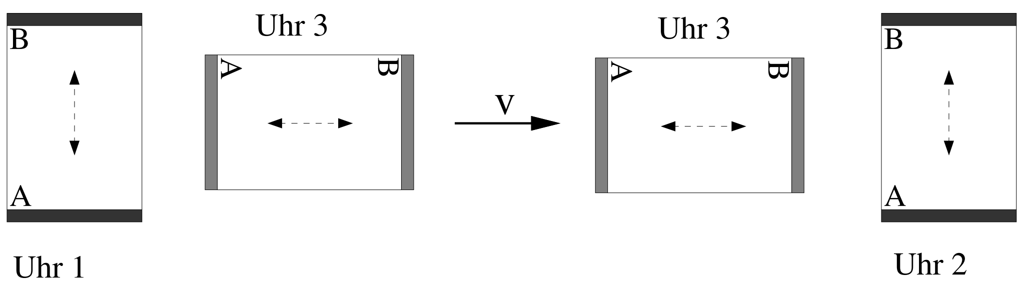


Abbildung 2: Nun ist die bewegte Uhr um 90° gedreht.

Um welchen Faktor muss der Abstand der beiden Spiegel der bewegten dritten Uhr verringert werden, damit sie um den in Aufgabe (a) berechneten Faktor langsamer geht? Warum ist das eine konsistente Fragestellung?

Lösung:

(a) Zwischen zwei Ticks der ruhenden Uhren vergeht die Zeit

$$t_0 = \frac{2L}{c}. \tag{1}$$

Mit Hilfe der Abbildung unten und einfachen geometrischen Überlegungen findet man $t'_0 = \gamma t_0$.

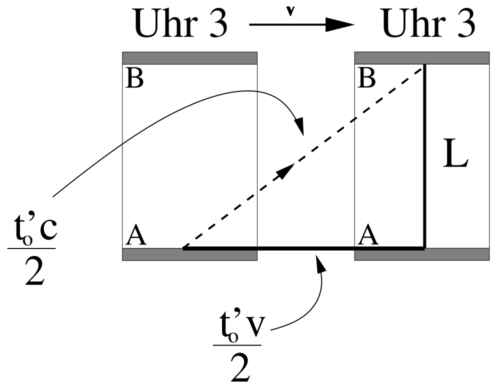


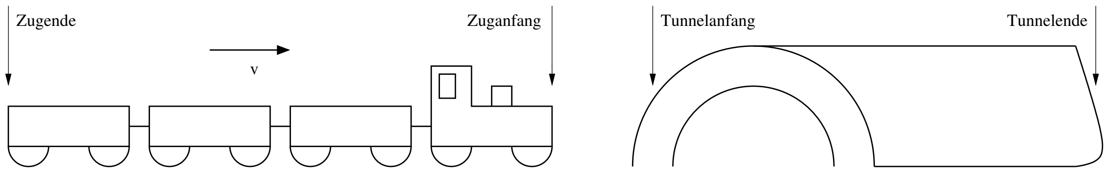
Abbildung 3: Die Uhr bewegt sich während das Licht zwischen den Spiegeln läuft.

Wie zu erwarten war ist das genau die Zeitdilatation für zwei Bezugssysteme, die sich mit Geschwindigkeit v relativ zu einander bewegen. Im Ruhesystem der Uhren 1 und 2 geht die bewegte Uhr also um einen Faktor $\gamma > 1$ langsamer als die beiden ruhenden Uhren. Wenn Uhr 3 in dem Moment, in dem sie sich am Ort von Uhr 1 befindet den gleichen Zählerstand wie Uhr 2 hat, dann ist ihr Zählerstand bei Ankunft an der Position von Uhr 2 um den Faktor γ geringer als der von Uhr 2.

(b) Die Zeit, die im bewegten System vergeht, sollte unabhängig davon sein, wie die Uhr orientiert ist. Deswegen ist dies eine sinnvolle Fragestellung. Man findet wieder durch geometrische Überlegungen, dass der Abstand zwischen den Spiegeln A und B in der Uhr 3 längenkontrahiert sein muss $L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L = \frac{L}{\gamma}$. Somit finden wir, dass die Zeitdilatation in diesem Gedankenexperiment auf die Längenkontraktion flührt.

2. **Zug im Tunnel**
Ein Zug der Ruhelänge Z_0 bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der (positiven) x-Richtung durch einen Tunnel der Ruhelänge L_0. Sei S das Ruhesystem des

Tunnels und S' das Ruhesystem des Zuges. Das Ereignis A : "Zuganfang trifft auf Tunnelanfang" finde in S zum Raumzeit-Punkt[1] $x_A^\mu = (ct_A, x_A)^T = (0,0)^T$ statt.



(a) Berechne die Raum-Zeit-Koordinaten der folgenden Ereignisse im Ruhesystem S des Tunnels in Abhängigkeit von (Z_0, L_0, v):

i. B: "Zugende trifft auf Tunnelanfang"

ii. C: "Zuganfang trifft auf Tunnelende"

iii. D: "Zugende trifft auf Tunnelende"

Konkret sei nun $Z_0 = 200m$ und $L_0 = 160m$ und somit die Ruhelänge des Zuges größer als die des Tunnels.

(b) Ein Beobachter in S stellt fest, dass die Ereignisse B und C gleichzeitig stattfinden. Berechne für diesen Fall die Geschwindigkeit v des Zuges.

(c) Betrachte nun das Ruhesystem S' des Zuges und v wie in (b) berechnet. Finden irgendwelche der vier Ereignisse $A, \ldots, D$ in S' gleichzeitig statt? Bestimme die Raumzeit-Koordinaten der Ereignisse $A, \ldots, D$ in S'. Gebe die zeitliche Abfolge der vier Ereignisse in S' an.

(d) Gibt es eine Geschwindigkeit $\tilde{v}$ des Zuges, sodass die Ereignisse B und C im System S' gleichzeitig sind?[2]

(e) Zeichne ein Minkowski-Diagramm im Ruhesystem S' des Zuges für $L_0 < Z_0$. Markiere die Punkte $A, \ldots, D$ und bestimme graphisch die Länge L des Tunnels im System S'.

Lösung:

(a) Das Ergebnis ist

$$x_B^\mu = \begin{pmatrix} \frac{Z_0}{\beta\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_C^\mu = \begin{pmatrix} \frac{L_0}{\beta} \\ L_0 \end{pmatrix}, \qquad x_D^\mu = \begin{pmatrix} \frac{L_0}{\beta} + \frac{Z_0}{\beta\gamma} \\ L_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(b) Das Ergebnis ist

$$v = \frac{3}{5}c. \tag{3}$$

[1]Die y- und z-Komponenten sind für das Problem irrelevant und können weggelassen werden.

[2]Ja/Nein genügt nicht als Antwort. Begründe deine Aussage.

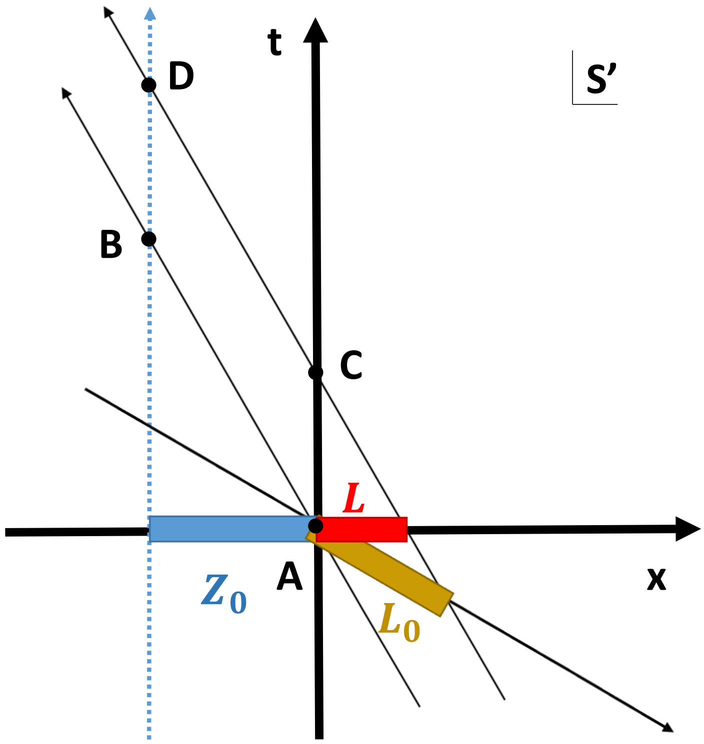
(c) Wir machen eine Lorentztransformation auf das System S': $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$. Nach Einsetzen der richtigen Zahlenwerte findet man die Abfolge der Ereignisse in S':

$$A \to C \to B \to D. \tag{4}$$

Der Anfang des Zuges ist also aus dem Tunnel heraus bevor das Ende drinnen ist.

(d) Die Bedingung heisst, dass der Zug in S' in den Tunnel passt. In S' ist der Tunnel längenkontrahiert.

(e) Das Minkowski-Diagramm im System S' sieht wie folgt aus:



Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 2cd, 2e