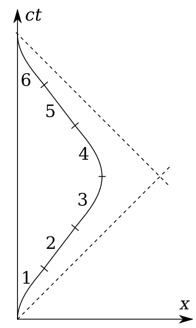
Übungsblatt 3

für das Tutorium am 24.03.2017

1. **Zwillingsparadoxon**

Während ein Zwilling auf der Erde studiert, reist seine Zwillingsschwester wie in nebenstehender Abbildung gezeigt durchs sonnige Universum: Die Abschnitte (1), (3), (4), (6) sind jeweils Pfade konstanter Beschleunigung in ihrem jeweiligen momentanen Ruhesystem, während die Abschnitte (2) und (5) gleichförmige Bewegung beschreiben.



(a) Wie verhalten sich die Eigenzeitintervalle $\Delta\tau_E$ und $\Delta\tau_R$ zueinander, die auf der Erde bzw. in der Rakete vergangen sind, wenn sich die Zwillinge wieder treffen? Dabei möchte die Zwillingsschwester auf ihrer Reise insgesamt die gleiche Zeitdauer (aus der Sicht des Bezugssystems der Erde) beschleunigen wie sie gleichförmig bewegt fliegt. Wie groß sind die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ und die maximale Entfernung $x_{\max}$, die sie dabei erreicht?

(b) Berechne $\Delta\tau_R$, $\Delta\tau_E - \Delta\tau_R$, $v_{\max}$, und $x_{\max}$ für die konstante Beschleunigung $g_0 = 9,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ für den Fall, dass auf der Erde 1 Jahr, 10 Jahre, 20 Jahre vergehen.

(c) Die Schwester will mit der gleichen Treibstoffmenge noch weiter fliegen, also verlängert sie die Reiseabschnitte gleichförmiger Bewegung (2) und (5). Zeige, dass im Grenzfall sehr langer Reisen gilt $\Delta\tau_R = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}$.

Lösung:

(a) Die Eigenzeit ist gegeben duch $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\mathrm{d}t$. Für eine hyperbolische Bewegung hat man:

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right), \tag{1}$$

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}, \tag{2}$$

$$\Delta\tau = \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\left(\frac{at_2}{c}\right) - \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\left(\frac{at_1}{c}\right). \tag{3}$$

Für $t_0 = \Delta\tau_E/8$ (E=Erde) berechnet sich die Raketeneigenzeit zu

$$\Delta\tau_R \;=\; 4 \times \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\left(\frac{at_0}{c}\right) + \frac{4t_0}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}}\,. \tag{4}$$

(b) Einfaches Einsetzen von Werten.

(c) Man findet $\Delta\tau_R \approx \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}$.

2. **4-dimensionaler ϵ-Tensor**

(a) Wie viele von 0 verschiedene Elemente hat der total antisymmetrische Tensor vom Rang 4, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$?
Für sein dreidimensionales Analogon, ϵ_{ijk}, gilt bekanntermaßen, dass dieser sein Vorzeichen bei zyklischer Vertauschung seiner Indizes beibehält. Man mache sich klar, dass diese Regel für $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in dieser Allgemeinheit falsch ist.
Drücke $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$ durch $\delta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu}$ aus.

(b) Zeige, dass dieser Tensor unter Standard-Lorentztransformationen invariant ist, d.h. zeige, dass $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ gilt, mit

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha\,\Lambda^\nu{}_\beta\,\Lambda^\rho{}_\gamma\,\Lambda^\sigma{}_\delta\;\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,. \tag{5}$$

Hinweis: Schreibe die rechte Seite dieser Gleichung als Determinante einer geeigneten Matrix.

Lösung:

(a) Man findet

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} &= -3!\;\delta_\lambda{}^\sigma = -6\;\delta_\lambda{}^\sigma\,,\\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} &= 2(\delta_\tau{}^\rho\delta_\lambda{}^\sigma - \delta_\lambda{}^\rho\delta_\tau{}^\sigma)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

(b) Zeige, dass die rechte Seite total antisymmetrisch in μ,ν,ρ,σ ist. Sie läßt sich daher als $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ mal die Determinante von Λ schreiben. Für eine Standard-Lorentztransformation haben wir $det(\Lambda) = 1$.

3. **Thomaspräzession**
Ein sehr schnelles Flugzeug ($\gamma \neq 1$) fliegt auf einer Kreisbahn um die Erde. Approximiere die Kreisbahn durch ein Polygon mit N Seiten, wobei $N \gg 1$. Im Erdsystem ändert das Flugzeug nach durchfliegen einer Seite des Polygons den Kurs um $\theta = 2\pi/N$. Bestimme die nötigen Kursänderungen im Ruhesystem des Flugzeug während einer Erdumrundung.
Im Limes $N \to \infty$ erhalten wir wieder die Kreisbahn. Die Differenz $\Delta\theta$ von dem Ergebnis oben und den 2π, die man im Erdsystem erhält, folgt aus der Thomaspräzession, also daher, dass zwei Lorentzboost nacheinander einer *Drehung* mal einem

Lorentzboost entsprechen. Dies ist detailliert im Buch von Prof. Rebhan auf den Seiten 344 und 345 erklärt.

Lösung:
Im Ruhesystems des Flugzeugs sind Entfernung in Bewegungsrichtung längenkontrahiert. Dies bedeutet, dass das Flugzeug seine Richtung auf der Kreisbahn nicht um 2π, sondern um $2\pi\gamma$ ändern muß. Während das Flugzeug um die Erde fliegt, erfährt es also eine kontinuierliche Präzession. Dies ist in einem allgemeineren Fall im Buch besprochen. Siehe Gleichungen (9.93) und (9.96) auf den Seiten 344 und 345.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2a, 2b, 3