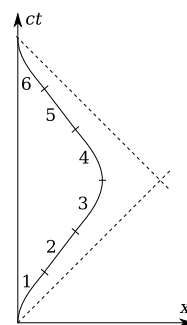


Übungsblatt 3

für das Tutorium am 24.03.2017

1. Zwillingsparadoxon

Während ein Zwilling auf der Erde studiert, reist seine Zwillingschwester wie in nebenstehender Abbildung gezeigt durchs sonnige Universum: Die Abschnitte (1), (3), (4), (6) sind jeweils Pfade konstanter Beschleunigung in ihrem jeweiligen momentanen Ruhesystem, während die Abschnitte (2) und (5) gleichförmige Bewegung beschreiben.



- (a) Wie verhalten sich die Eigenzeitintervalle $\Delta\tau_E$ und $\Delta\tau_R$ zueinander, die auf der Erde bzw. in der Rakete vergangen sind, wenn sich die Zwillinge wieder treffen? Dabei möchte die Zwillingschwester auf ihrer Reise insgesamt die gleiche Zeitdauer (aus der Sicht des Bezugssystems der Erde) beschleunigen wie sie gleichförmig bewegt fliegt. Wie groß sind die maximale Geschwindigkeit v_{\max} und die maximale Entfernung x_{\max} , die sie dabei erreicht?
- (b) Berechne $\Delta\tau_R$, $\Delta\tau_E - \Delta\tau_R$, v_{\max} , und x_{\max} für die konstante Beschleunigung $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ für den Fall, dass auf der Erde 1 Jahr, 10 Jahre, 20 Jahre vergehen.
- (c) Die Schwester will mit der gleichen Treibstoffmenge noch weiter fliegen, also verlängert sie die Reiseabschnitte gleichförmiger Bewegung (2) und (5). Zeige, dass im Grenzfall sehr langer Reisen gilt $\Delta\tau_R = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}$.

2. 4-dimensionaler ϵ -Tensor

- (a) Wie viele von 0 verschiedene Elemente hat der total antisymmetrische Tensor vom Rang 4, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$?
Für sein dreidimensionales Analogon, ϵ_{ijk} , gilt bekanntermaßen, dass dieser sein Vorzeichen bei zyklischer Vertauschung seiner Indizes beibehält. Man mache sich klar, dass diese Regel für $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in dieser Allgemeinheit falsch ist. Drücke $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$ durch $\delta_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu}$ aus.
- (b) Zeige, dass dieser Tensor unter Standard-Lorentztransformationen invariant ist, d.h. zeige, dass $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ gilt, mit

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1}$$

Hinweis: Schreibe die rechte Seite dieser Gleichung als Determinante einer geeigneten Matrix.

3. Thomaspräzession

Ein sehr schneller Flugzeug ($\gamma \neq 1$) fliegt auf einer Kreisbahn um die Erde. Approximiere die Kreisbahn durch ein Polygon mit N Seiten, wobei $N \gg 1$. Im Erdsystem ändert das Flugzeug nach durchfliegen einer Seite des Polygons den Kurs um $\theta = 2\pi/N$. Bestimme die nötigen Kursänderungen im Ruhesystem des Flugzeug während einer Erdumrundung.

Im Limes $N \rightarrow \infty$ erhalten wir wieder die Kreisbahn. Die Differenz $\Delta\theta$ von dem Ergebnis oben und den 2π , die man im Erdsystem erhält, folgt aus der Thomaspräzession, also daher, dass zwei Lorentzboost nacheinander einer *Drehung* mal einem Lorentzboost entsprechen. Dies ist detailliert im Buch von Prof. Rebhan auf den Seiten 344 und 345 erklärt.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2a, 2b, 3