Übungsblatt 4

für das Tutorium am 31.03.2017

1. **Kosmischer Apfelschuss**
Im 29. Jahrhundert ist das Schweizer Sonnensystem vom bösen Lord Gessler bedroht. Gessler entführt den Freiheitskämpfer Willhelm Tell und seinen Sohn. Tell und sein Sohn werden in zwei Raketen R_1 und R_2 gefangen gehalten, die sich in Bezug auf ein Intertialsystem S mit Geschwindigkeiten vom Betrag $\frac{c}{2}$ auf parallelen geraden Bahnen in entgegengesetzte Richtungen bewegen (siehe Abbildung 1). Der Normalabstand der Bahnen sei d.

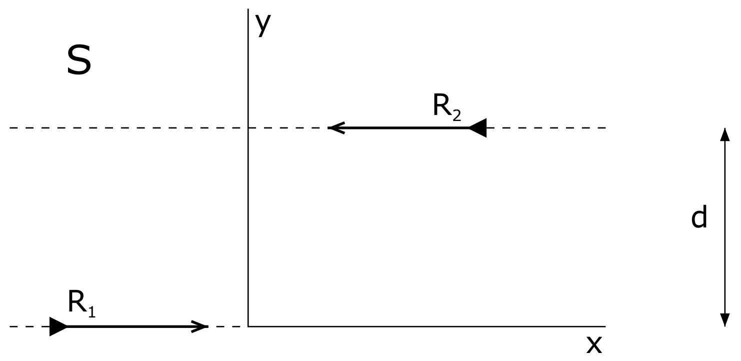


Abbildung 1: Zwei Raketen fliegen im Abstand d an einander vorbei.

Um die Freiheit zu erlangen muss Tell von Rakete R_1 aus mit einer Armbrust einen Apfel vom Kopf seines Sohnes in Rakete R_2 schießen. Der Pfeil fliegt an jenem Zeitpunkt in S los, an dem die Raketen einander in S passieren (nimm an, dass sie punktförmig sind). Im Ruhesystem S' von R_1 habe der Pfeil eine Geschwindigkeit vom Betrag

$$u' = \frac{\sqrt{79}}{10}c. \tag{1}$$

(a) Unter welchem Winkel α' zur y'-Achse in S' muss der Pfeil abgeschossen werden, damit er bei Rakete R_2 ankommt?

(b) Bestimme die Geschwindigkeit des Pfeiles $\vec{u}'$ in S' sowie die zugehörige Geschwindigkeit $\vec{u}$ in S.

(c) Wie lange ist der Pfeil jeweils in S und S' vom Abschuss bis zum Zusammentreffen mit R_2 unterwegs?

Lösung:

(a) Es gilt folgendes Transformationsgesetz für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{u}$:

$$u_\parallel = \frac{u'_\parallel + v}{1 + \frac{v u'_\parallel}{c^2}} \tag{2}$$

$$\vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}'_\perp}{\gamma \left(1 + \frac{v u'_\parallel}{c^2}\right)} \tag{3}$$

Im Ruhesystem S' der Rakete R_1 werde der Pfeil im Winkel α' wie in Abbildung 2 abgeschossen.

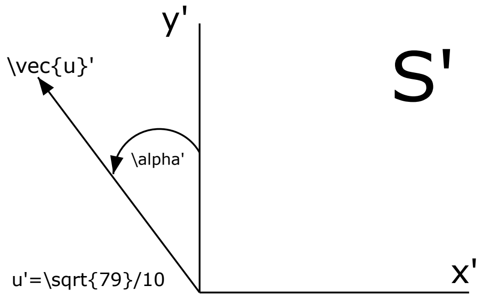


Abbildung 2: Abschusswinkel im Ruhesystem S'.

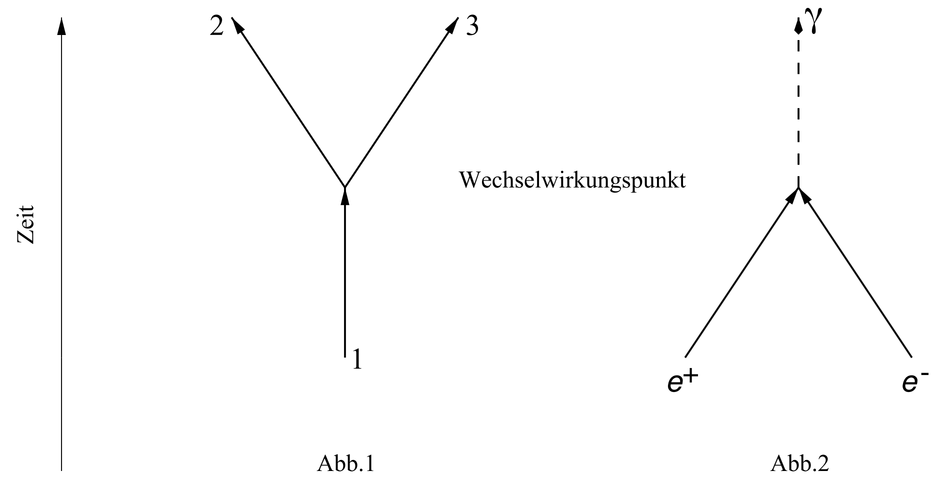
Wir können damit die Geschwindigkeitskomponenten in S und S' als Funktion von α' bestimmen. Die Bedingung, dass der Pfeil bei R_2 ankommt ist, dass seine Geschwindigkeit im System S die gleiche x-Komponente hat, wie die Rakete R_2. Beachte, dass wir die Konfiguration zu dem Zeitpunkt betrachten, als R_1 und R_2 auf der y-Achse liegen. Wenn die Geschwindigkeitskomponenten in x-Richtung gleich sind, werden sie sich "irgendwann" treffen. Das erklärt auch warum, das Resultat unabhängig vom Abstand d sein wird.

Man findet am Ende, dass $\alpha' = \arctan \frac{8}{\sqrt{15}}$.

(b) Einfaches Einsetzen des obigen Winkels in die allgemeinen Formeln für die Geschwindigkeiten.

(c) Im System S ist die Zeitdifferenz gegeben durch $\Delta t = \frac{4\sqrt{5}}{5c} d$. Durch transformieren in das System S' findet man $\Delta t'$.

2. **Zerfalls- und Streuprozesse**
Bei Zerfalls- und Stoßprozessen von Elementarteilchen ist der Gesamtviererimpuls vor und nach dem Prozess derselbe. Das entspricht der Erhaltung von Gesamtenergie und Gesamtimpuls. Betrachte einen Zerfallsprozess (Abb.1) und einen Paarvernichtungsprozess von einem Elektron und einem Positron unter Abstrahlung eines Photons (Abb.2) wie folgt:



(a) Zeige, dass der Zerfallsprozess in Abb.1 nur möglich ist, wenn für die Ruhemassen m_1, m_2, m_3 der Teilchen gilt: $m_1 \geq m_2 + m_3$.

(b) Sei $m_1 \geq m_2 + m_3$. Berechne die kinetischen Energien der Zerfallsprodukte in Abb.1 im Intertialsystem, wo Teilchen 1 ruht.

(c) Betrachte den Zerfallsprozess $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$ eines Kaons in zwei Pionen mit den Ruhemassen[1] $m_{K^+} = 493.7$ MeV$/c^2$, $m_{\pi^+} = 139.6$ MeV$/c^2$ und $m_{\pi^0} = 135$ MeV$/c^2$ und berechne die kinetischen Energien der Zerfallsprodukte.

(d) Zeige, dass der Paarvernichtungsprozess in Abb.2 nicht möglich ist.

Lösung: Der Viererimpuls ist gegeben durch

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c + \frac{T}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{4}$$

und es gilt $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$, wobei m_0 die Ruhemasse ist. Weiters ist T die kinetische Energie.

(a) Im Ruhesystem von Teilchen 1 findet man $m_1 = m_2 + m_3 + \frac{T_2+T_3}{c^2} \geq m_2 + m_3$.

(b) Das Ergebnis ist $T_2 = \frac{[(m_1-m_2)^2-m_3^2]c^2}{2m_1}$ und $T_3 = \frac{[(m_1-m_3)^2-m_2^2]c^2}{2m_1}$.

[1]Ein Elektronvolt ist die Standardenergieeinheit in der Hochenergiephysik: 1 eV$= 1.6 \times 10^{-19}$ Joule.

(c) Einfaches Einsetzen der Zahlenwerte.

(d) Im Ruhesystem von e^- hat man

$$p^\mu_{e^-} = \begin{pmatrix} m_e c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p^\mu_\gamma = \hbar k^\mu = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \tag{5}$$

und daher $p_\gamma \cdot p_{e^-} = \hbar\omega m_e$. Zeige, dass dies ein Widerspruch ist.
Bemerkungen:
Bei solchen Prozessen müssen noch weitere Erhaltungssätze wie Drehimpulserhaltung (insbesondere Spin), Ladungserhaltung, etc. erfüllt sein.
Obwohl der Paarvernichtungsprozess für e^+, e^- in ein Photon nicht erlaubt ist, sind Zerfälle unter Aussendung mehrerer Photonen möglich.

3. **Feldstärketensor**

(a) Drücke die Lorentzskalare $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$, wobei $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$, durch $\vec{E}$, $\vec{B}$ aus.

(b) Gibt es noch weitere Invarianten, die quadratisch in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind?

(c) Kann es ein elektromagnetisches Feld geben, welches in einem Inertialsystem rein elektrisch ist und in einem anderen rein magnetisch? Welche Kriterien müssen erfüllt sein, damit es ein Inertialsystem gibt, in dem das elektrische Feld verschwindet?
Hinweis: Verwende die Resultate aus Aufgabe (a).

Lösung:

(a) Man findet durch explizites Ausrechnen $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -2\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B}$.

(b) Es gibt keine weiteren skalaren Invarianten die quadratisch in den Feldstärken sind. Eine Möglichkeit das zu zeigen ist, eine skalare Kontraktion zu schreiben als:

$$s = t^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \tag{6}$$

wobei $t^{\mu\nu\rho\sigma}$ ein Rang-4-Tensor ist, der aus lorentzinvarianten Größen wie der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ oder dem vierdimensionalen epsilon-Tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ bestehen kann. Es gibt nur zwei Möglichkeiten, die mit der Antisymmetrie der Feldstärken kompatibel sind:

$$\frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{7}$$

Das führt zu den Invarianten $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ unter der Verwendung von $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. Weiter gilt:

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon^{\rho\sigma}{}_{\kappa\lambda} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \tag{8}$$

Das erklärt $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$.

(c) Die Antwort ist nein. Betrachte hierzu $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.
In einem Inertialsystem ohne elektrisches Feld gilt $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \geq 0$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0$.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2abc, 2d, 3