Übungsblatt 5

für das Tutorium am 07.04.2017

1. **Energie-Impuls-Tensor**
   In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Metrik ein dynamisches Feld $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Der Energie-Impuls-Tensor folgt aus der Variation der Wirkung bzgl. der Metrik $g_{\mu\nu}$. Für die Maxwell-Wirkung ausgewertet im Minkowski-Raum $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist er gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right), \tag{1}$$

   mit $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

   (a) Berechne $\partial_\nu T^{\mu\nu}$ und vereinfache mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen in Viererno-tation.

   (b) Berechne die Spur von $T^{\mu\nu}$.

   Lösung:
   Man findet $\partial_\nu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\mu\rho}j_\rho$ und $TrT^{\mu\nu} = 0$.

2. **Punktladungen**
   Betrachte zwei Punktladungen q_1 und q_2 an $z = \pm a$ und $x = y = 0$.

   (a) Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Gesamtladung.

   (b) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ zunächst für beliebiges $\vec{r}$. Was ist das Feld an $\vec{r} = (0, y, 0)$ für $q_1 = q_2$ und $q_1 = -q_2$?

   (c) Verwende den Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik um die Kraft von q_1 auf q_2 für den Fall $q_1 = q_2 = q$ als Oberflächenintegral des Maxwell'schen Spannungstensors entlang der Symmetrieebene $z = 0$ auszurechnen.

   Lösung:

   (a) Mittels Superposition ist die gesamte Ladungsdichte einfach zu bestimmen. Die Gesamtladung ist natürlich $Q = q_1 + q_2$.

   (b) Bei $x = z = 0$ reduziert sich das allgemeine $\vec{E}$-Feld auf

$$\vec{E}(0, y, 0) = \frac{1}{[y^2 + a^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (q_1 + q_2)y \\ (-q_1 + q_2)a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(c) Der Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik besagt

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_V^{mech} + \vec{P}_V^{em})_k = \oint_{\partial V} df_i T_{ik}, \tag{3}$$

wobei T_{ik} der Maxwell'sche Spannungstensor ist:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\right]. \tag{4}$$

Da wir an der Kraft auf die "untere" Ladung interessiert sind, wählen wir V als den unteren Halbraum $z < 0$. Damit kann man sich überlegen, dass man nur die zz-Komponente des Spannungstensors benötigt. Obiges Integral führt dann auf

$$F_z = -q^2 \frac{1}{4a^2} = -\frac{q^2}{(2a)^2}. \tag{5}$$

Die Kraft zeigt in negative z-Richtung, also von der anderen Ladung weg, und ist proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen. Das ist die Coulombkraft.

3. **Punktladung zwischen gewinkelten Leiterebenen**
Zwei geerdete Leiterebenen trefen sich in einem Winkel von 60° im Ursprung. Eine Punktladung q befinde sich im Abstand r_0 vom Ursprung entlang der x-Achse, sodass der Winkel zwischen der x-Achse und den beiden Platten jeweils 30° beträgt.

(a) Welche Anordnung von Spiegelladungen löst das Randwertproblem? Skizziere die Anordnung, bestimme die Ortsvektoren der Spielgelladungen und schreibe die Poissongleichung und die Randbedingungen an.

(b) Bestimme das elektrostatische Potenzial und zeige, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

(c) Bestimme die Oberflächenladungsdichte auf der oberen Leiterebene.

Lösung:

(a) Die Anordnung von Spiegelladungen ist in Abbildung 1 gezeigt.

(b) Das elektrostatische Potenzial folgt aus dem Superpositionsprinzip.

(c) Die Oberflächenladungsdichte ist definiert durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}E_n = \frac{1}{4\pi}\vec{n}\vec{E}, \tag{6}$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf der oberen Ebene ist und das elektrische Feld am Ort der Ebene ausgewertet werden muss. Das vereinfachte Endergebnis ist

$$\sigma(r,z) = \frac{qr_0}{4\pi}\left[\frac{2}{\left[r^2 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[r^2 - \sqrt{3}rr_0 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[r^2 + \sqrt{3}rr_0 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{7}$$

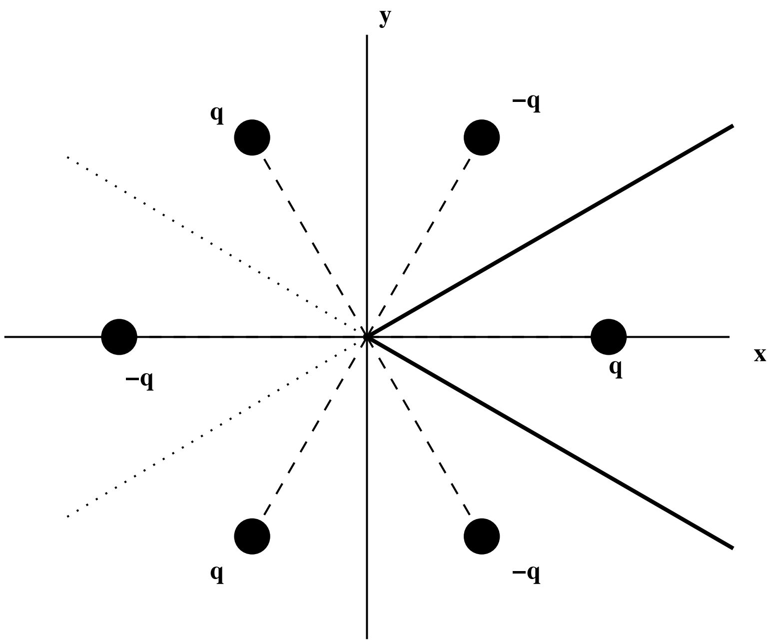

Abbildung 1: Spiegelladungen

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 2c, 3ab, 3c