

Übungsblatt 5

für das Tutorium am 07.04.2017

1. Energie-Impuls-Tensor

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Metrik ein dynamisches Feld $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Der Energie-Impuls-Tensor folgt aus der Variation der Wirkung bzgl. der Metrik $g_{\mu\nu}$. Für die Maxwell-Wirkung ausgewertet im Minkowski-Raum $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist er gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right), \quad (1)$$

mit $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

- Berechne $\partial_\nu T^{\mu\nu}$ und vereinfache mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen in Vierernotation.
- Berechne die Spur von $T^{\mu\nu}$.

2. Punktladungen

Betrachte zwei Punktladungen q_1 und q_2 an $z = \pm a$ und $x = y = 0$.

- Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Gesamtladung.
- Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ zunächst für beliebiges \vec{r} . Was ist das Feld an $\vec{r} = (0, y, 0)$ für $q_1 = q_2$ und $q_1 = -q_2$?
- Verwende den Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik um die Kraft von q_1 auf q_2 für den Fall $q_1 = q_2 = q$ als Oberflächenintegral des Maxwell'schen Spannungstensors entlang der Symmetrieebene $z = 0$ auszurechnen.

3. Punktladung zwischen gewinkelten Leiterebenen

Zwei geerdete Leiterebenen treffen sich in einem Winkel von 60° im Ursprung. Eine Punktladung q befinde sich im Abstand r_0 vom Ursprung entlang der x -Achse, sodass der Winkel zwischen der x -Achse und den beiden Platten jeweils 30° beträgt.

- Welche Anordnung von Spiegelladungen löst das Randwertproblem? Skizziere die Anordnung, bestimme die Ortsvektoren der Spiegelladungen und schreibe die Poissongleichung und die Randbedingungen an.
- Bestimme das elektrostatische Potenzial und zeige, dass die Randbedingungen erfüllt sind.
- Bestimme die Oberflächenladungsdichte auf der oberen Leiterebene.

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 2c, 3ab, 3c