Übungsblatt 6

für das Tutorium am 05.05.2017

1. **Energie- und Impulserhaltung und relativistischer Doppler-Effekt**
   Ein Elektron e^- und ein Positron e^+, jeweils mit der Ruhemasse m_e und mit der Bindungsenergie E_B zu einem Positronium gebunden, vernichten sich gegenseitig unter Abstrahlung zweier Photonen.

   (a) Berechne die Energie, den Impuls und die Frequenz der Photonen im Ruhesystem des Positroniums.

   (b) Das Positronium bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ vom Beobachter weg und zerfalle in zwei Photonen, die sich parallel und antiparallel zu $\vec{v}$ bewegen. Welche Energie, welchen Impuls und welche Frequenz ν' misst ein Beobachter für das Photon, welches sich auf ihn zu bewegt? Gib die Frequenz ν' in Abhängigkeit von der Frequenz ν, die das Photon im Ruhesystem des Positrons hat, an.

   Lösung:

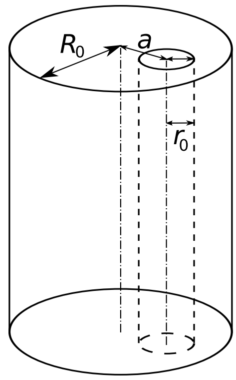
   (a) Mit $\nu = E_P/h$ findet man die Frequenz eines Photons in Abhängigkeit der Elektron-Ruhmasse und der Positronium-Bindungsenergie,

   $$\nu = \frac{1}{h}\left(m_e c^2 + \frac{E_B}{2}\right). \tag{1}$$

   (b) Die Frequenz des Photons im Laborsystem ist $\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$.

2. **Zylinder mit exzentrischer Längsbohrung**

   (a) Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder mit Radius R_0 und homogener Raumladungsdichte ρ_0. Berechne das elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$ und das davon abgeleitete elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Inneren und Äußeren des Zylinders durch Lösen der Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$. Das Potenzial kann hierbei so gewählt werden, dass es entlang der Zylinderachse endlich ist. Weitere Integrationskonstanten sind geeignet zu wählen, so dass das Resultat *jeder* Integration im gesamten Raum stetig ist.

   (b) In diesen unendlich langen Zylinder wird nun ein unendlich langes achsenparalleles aber exzentrisches Loch mit Radius r_0 gebohrt (siehe nebenstehende Skizze). Der Abstand der Achse des Zylinders zur Achse der Bohrung sei a, wobei $a + r_0 < R_0$ gelte (d.h., die Bohrung befindet sich zur Gänze innerhalb des Zylinders). Berechne für den (ladungsfreien) Innenraum der Bohrung das elektrostatische Potenzial und das elektrostatische Feld.

   Lösung:

   (a) Wir arbeiten in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) und finden:

$$\phi = \begin{cases} -\pi\rho_0 r^2 + C_3 & r \le R_0 \\ -2\pi\rho_0 R_0^2 \ln\frac{r}{R_0} - \pi\rho_0 R_0^2 + C_3 & r > R_0 \end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_r \begin{cases} 2\pi\rho_0 r & r \le R_0 \\ 2\pi\rho_0 \frac{R_0^2}{r} & r > R_0 \end{cases} \tag{2}$$

   wobei C_3 eine beliebige Konstante ist.

   (b) Anwendung des Superpositionsprinzips ergibt $\vec{E}(\vec{r}) = 2\vec{a}\pi\rho_0$.

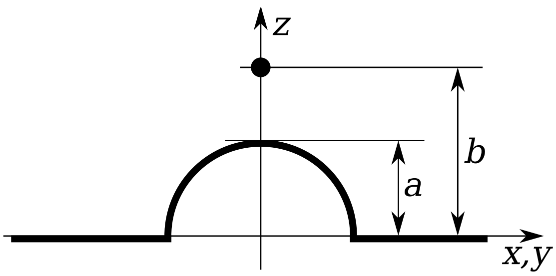
3. **Leitende Ebene mit kugelförmiger Ausbuchtung**
   Betrachte eine unendlich ausgedehnte geerdete Ebene mit einer Ausbuchtung in Form einer Halbkugel mit Radius a. Eine Punktladung q befindet sich auf der Symmetrieachse im Abstand $b > a$ vom Mittelpunkt der Halbkugel (siehe Bild unten).

   (a) Berechne das elektrostatische Potenzial ϕ mit Hilfe der Methode der Bildladung und überprüfe, dass es die richtigen Randbedingungen erfüllt.

   (b) Berechne die auf der Halbkugel influenzierte Gesamtladung.

   Lösung:

   (a) Ansatz: Wir spiegeln die Ladung an der Kugel und an der Ebene und die erhaltenen Bildladungen werden nochmals an der anderen Fläche gespiegelt,



was zu einer dritten Bildladung führt:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos(\theta)}} - \frac{q}{\sqrt{r^2+b^2+2rb\cos(\theta)}} \\ &\quad - \frac{q\,a}{b\sqrt{r^2+\frac{a^4}{b^2}-2r\frac{a^2}{b}\cos(\theta)}} + \frac{q\,a}{b\sqrt{r^2+\frac{a^4}{b^2}+2r\frac{a^2}{b}\cos(\theta)}}\,. \qquad (3)\end{aligned}$$

(b) Berechnung der influenzierten Ladungsdichte, mittels $4\pi\sigma = E_r(r=a)$, wobei $E_r = -\partial\phi/\partial r$ ist. Dies ergibt:

$$\sigma = \frac{qa\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{4\pi}\left(\frac{1}{(a^2+b^2-2ab\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(a^2+b^2+2ab\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}\right)\,. \qquad (4)$$

Um die influenzierte Gesamtladung zu finden muessen wir jetzt noch über die Halbkugel integrieren und finden $Q = -q\left(1+\frac{a^2-b^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 3a, 3b