

# Übungsblatt 7

für das Tutorium am 12.05.2017

## 1. Endlicher geladener Stab und Multipolmomente

Im Plenum haben wir gesehen, dass ein geladener, zur  $z$ -Achse parallel ausgerichteter und unendlich langer Stab der Linienladungsdichte  $\tau$  das Potenzial

$$\Phi(x, y, z) = -2\tau \ln(\sqrt{x^2 + y^2}/c) \quad (1)$$

erzeugt, wobei  $c$  eine beliebige Konstante (Eichfreiheit) ist. Betrachten Sie im Folgenden einen endlichen Stab mit Gesamtladung  $Q$ , der von  $z = -L$  bis  $z = L$  verläuft.

- Berechnen Sie (z.B. mittels Green-Funktionen) das Potenzial für  $z = 0$ .  
Hinweis: Überlegen Sie welche Symmetrien vorliegen und wählen Sie geeignete Koordinaten,  $\int d\alpha/\sqrt{1+\alpha^2} = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$
- Berechnen Sie die ersten zwei nichtverschwindenden Terme von  $\Phi(x, y, 0)$  in der Reihenentwicklung für  $\rho \gg L$ . Finden Sie den führenden Term von  $\Phi(x, y, 0)$  im Limes  $\rho \ll L$  und vergleichen Sie mit dem Ergebnis für den unendlich langen Stab.
- Berechnen Sie die ersten beiden nichtverschwindenden Terme des Potenzials in einer kartesischen Multipolentwicklung.
- Berechnen Sie die ersten beiden nichtverschwindenden Terme des Potenzials mittels Kugelflächenfunktionen. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von den vorherigen Unterpunkten. Hinweis: Raten Sie die relevanten Multipolmomente durch Ausnutzen der Symmetrien.

*Lösung:*

- Mit der Formel für das Integral findet man schnell

$$\Phi(\rho, 0) = -2\tau \ln \left[ \frac{\rho}{L + \sqrt{L^2 + \rho^2}} \right] \quad (2)$$

mit  $\tau = Q/(2L)$ .

- Limes kleiner Abstände:  $\sqrt{\rho^2 + z^2} \ll L$   
Dies ist äquivalent zu  $\rho/L \rightarrow 0$ . Hier gilt es zunächst den Pol bei  $\varepsilon := \rho/L \rightarrow 0$  abzuspalten und dann den Rest in einer Taylorreihe in  $\varepsilon$  zu entwickeln. Man erhält

$$\Phi(\rho, z) \approx \tau \left( -2 \ln \frac{\rho}{2L} + \frac{\rho^2}{2L^2} \right) \quad (3)$$

Limes  $\sqrt{\rho^2 + z^2} \gg L$

Hierzu ist eine Reihenentwicklung in  $\varepsilon := L/\rho \ll 1$  durchzuführen, was zu

$$\Phi(\rho, z) \approx \tau \left( \frac{2L}{\rho} - \frac{L^3}{3\rho^3} \right) \quad (4)$$

führt.

(c) Für die nichtverschwindenden kartesischen Multipolmomente findet man

$$\begin{aligned} Q &= 2L\tau, \\ Q_{xx} = Q_{yy} &= -\frac{1}{2}Q_{zz} = -\frac{2\tau}{3}L^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Aus Symmetriegründen verschwindet der Rest.

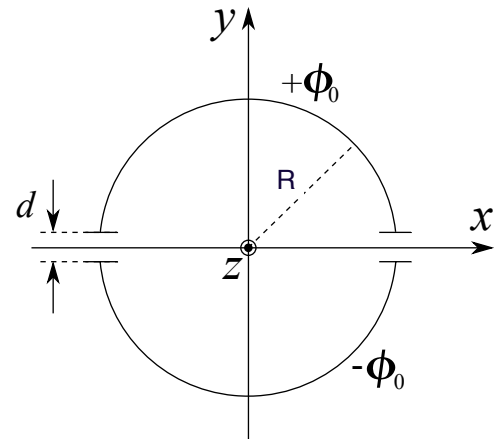
(d) Man findet

$$\begin{aligned} q_{00} &= 2L\tau \\ q_{20} &= \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{4\tau L^3}{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. Geteilter Kreiszyylinder A: Dirichlet Green-Funktion

Ein unendlich langer unendlich dünnwandiger leitender Kreiszyylinder mit dem Radius  $R$  ist durch einen Schnitt längs seiner Achse in zwei Hälften geteilt, welche voneinander durch einen schmalen Spalt der Breite  $d$ ,  $d \ll R$ , isoliert sind und auf den Potentialen  $+\Phi_0$  bzw.  $-\Phi_0$  gehalten werden (siehe Abbildung).

Berechnen Sie das elektrostatische Potential  $\Phi(\rho, \varphi)$  mittels der Dirichlet Green-Funktion. Vernachlässigen Sie den Spalt in dieser Rechnung



Anleitung: Ermitteln Sie die Dirichlet Green-Funktion indem Sie die Lösung des entsprechenden Bildladungsproblems verwenden. Im Plenum wurde gezeigt, dass das Potential eines unendlich ausgedehnten geladenen Stabs der Linienladungsdichte  $\tau$  an der Position  $(a, b)$  in Anwesenheit eines geerdeten zylindrischen Leiters durch

$$\Phi(x, y) = -2\tau \ln \left( \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2 a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y - \frac{R^2 b}{a^2 + b^2}\right)^2}} \right) - 2\tau \ln \left( \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (7)$$

gegeben ist. Verwenden Sie Polarkoordinaten (auch für Position der Quellen und Bildquellen). Zeigen Sie die Symmetrie der Dirichlet Green-Funktion. Verwenden

Sie schließlich

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{1 - \alpha \cos(\varphi - \varphi')} - \int_\pi^{2\pi} \frac{d\varphi'}{1 - \alpha \cos(\varphi - \varphi')} = \frac{4 \arctan\left(\frac{\alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\right)}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (8)$$

*Lösung:* (Auf Grund der Schwierigkeiten hier im Detail, siehe auch das entsprechende Problem im Buch auf Seite 430.) Das Problem reduziert sich auf ein zweidimensionales in der  $x - y$ -Ebene. Mit dem gegebenen Potenzial, hat man ein entsprechendes Randwertproblem für eine (zweidimensionale) Punktladung der Stärke  $\tau$  mit der Randbedingung  $\Phi(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = 0$  gelöst. Daraus erhält man die Dirichlet Green-Funktion über

$$G_D(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \frac{\Phi(\rho, \varphi; \rho_\tau, \varphi_\tau)}{\tau}, \quad (9)$$

wobei  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $a = \rho_\tau \cos \varphi_\tau$  und  $b = \rho_\tau \sin \varphi_\tau$ . Im Folgenden setzt man  $\rho_\tau \rightarrow \rho'$  und  $\varphi_\tau \rightarrow \varphi'$ .

Für die Dirichlet Green-Funktion erhält man in Polarkoordinaten nach kurzem Umformungen

$$G_D(\rho, \rho', \varphi, \varphi') = -\ln \left[ \frac{R^2 (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi'))}{R^4 + \rho^2 \rho'^2 - 2R^2 \rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')} \right], \quad (10)$$

woraus man die Symmetrie in  $\vec{r}, \vec{r}'$  sofort ablesen kann. Das Potenzial bei den vorgegebenen Randbedingungen am Zylinder und in Abwesenheit von freien Ladungen ist durch

$$\Phi(\rho, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^\pi \Phi_0 - \int_\pi^{2\pi} \Phi_0 \right] \partial_{n'} G_D(\rho, \rho', \varphi, \varphi')|_{\rho'=R} R d\phi, \quad (11)$$

zu finden, wobei  $\partial_{n'} = \partial_{\rho'}$  ( $\partial_{n'} = -\partial_{\rho'}$ ) für  $\rho < R$  ( $\rho > R$ ). Mit

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \quad (12)$$

bekommt man

$$\begin{aligned} \pm \partial_{\rho'} G_D(\rho, \rho', \varphi, \varphi')|_{\rho'=R} &= \mp 2 \left[ \frac{\rho' - \rho \cos(\varphi - \varphi')}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho^2 \rho' - R^2 \rho' \cos(\varphi - \varphi')}{R^4 + \rho^2 \rho'^2 - 2R^2 \rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')} \right]_{\rho'=R} = \\ &= \mp 2 \frac{1}{R} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi')} \\ &= -\frac{2}{R} \frac{|\rho^2 - R^2|}{R^2 + \rho^2} \frac{1}{1 - \frac{2\rho R}{R^2 + \rho^2} \cos(\varphi - \varphi')}. \end{aligned} \quad (13)$$

Setzt man dies noch in die Integralformel ergibt sich für das Potenzial

$$\Phi(\rho, \varphi) = \frac{2\Phi_0}{\pi} \arctan \left( \frac{2\rho R \sin \varphi}{|R^2 - \rho^2|} \right). \quad (14)$$

### 3. Geteilter Kreiszyylinder B: Vollständige Funktionensysteme in der Ebene

- (a) Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial  $\phi(\rho, \varphi)$  mittels eines geeigneten vollständigen Funktionensystems.
- (b) Berechne die Flächenladungsdichte  $\sigma(\varphi)$  auf dem leitenden Zylinder.
- (c) Berechnen Sie die Ladung pro Längeneinheit auf den Kreiszyylinderhälften sowie die Kapazität dieser Anordnung pro Längeneinheit.

Anleitung: Der Spalt soll nur bei Punkt (c) berücksichtigt werden, bei den Punkten (a) und (b) soll er ignoriert werden. Als Ansatz im Inneren kann verwendet werden  $\phi(R, \varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi] \left(\frac{\rho}{R}\right)^m$ . Siehe hierzu auch Beispiel 14.3. im Lehrbuch "Theoretische Physik" von M. Bartelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan & A. Wipf

Verwenden Sie ferner die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p \sin \varphi}{1-p^2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad p^2 \leq 1. \quad (15)$$

Bei Punkt (c) soll der führende Term der Kapazität angegeben werden (Winkelfunktionen im Ergebnis für  $d \ll R$  entwickeln).

*Lösung:*

- (a) Das Potenzial hat die selbe Form wie in Beispiel 2.

- (b) Die Flächenladungsdichte ist  $\sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{R\pi^2} \frac{1}{\sin \varphi}$ .

Anmerkung:  $\sigma(\varphi)$  divergiert für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$ , weshalb bei Punkt (c) der Spalt nicht ignoriert werden kann.

- (c) Ladung  $\tau_1$  pro Längeneinheit auf der Zylinderhälfte 1 ( $0 < \varphi < \pi$ ):

$$\tau_1 \approx \frac{2\phi_0}{\pi^2} \log \frac{4R}{d} := \tau.$$

Analog für  $\pi < \varphi < 2\pi$ :

$$\tau_2 \approx -\frac{2\phi_0}{\pi^2} \log \frac{4R}{d} = -\tau.$$

Kapazität pro Längeneinheit:

$$C = \frac{\tau}{\phi_0 - (-\phi_0)} = \frac{\tau}{2\phi_0} = \frac{1}{\pi^2} \log \frac{4R}{d}.$$

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2, 3a, 3bc