Übungsblatt 8

für das Tutorium am 19.05.2017

1. **Linearer Quadrupol**
   Ein linearer Quadrupol besteht aus drei Ladungen q, $-2q$, und q auf der z-Achse. Die positiven Ladungen sind an $z = \pm d$. Die negative Ladung ist am Ursprung.

   (a) Argumentieren Sie, dass man dieses System auch durch zwei Dipole beschreiben kann. Was sind die beiden Dipolmomente? Wo liegen die Zentren der Dipole?

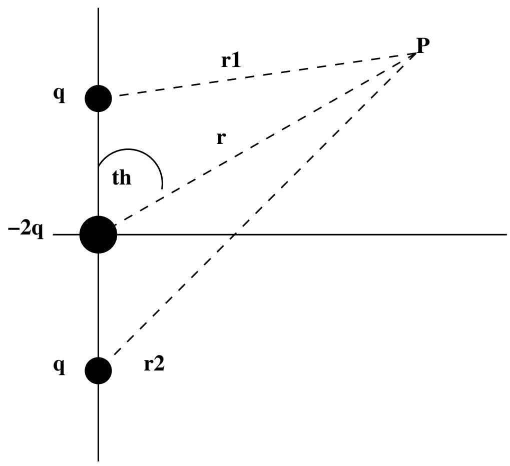
   (b) Berechnen Sie den führenden Term des Potentials für $r \gg d$ in Kugelkoordinaten.

   (c) Skizzieren Sie das Potential für festen Radius, in Abhängigkeit von den Winkeln θ und φ.

   Lösung:

   (a) Man teile die Ladung $-2q$ im Ursprung in zwei Ladungen $-q$ und $-q$. Man kombiniere eine der Ladungen mit der Ladung $+q$ an $z = +d$ zu einem Dipol. Die Zentren der Dipole liegen jeweils an $z = \pm\frac{d}{2}$. Die Dipolmomente sind $qd\vec{e}_z$ und $-qd\vec{e}_z$. Das Gesamtdipolmoment verschwindet.

   (b) Die Anordnung sieht wie folgt aus:

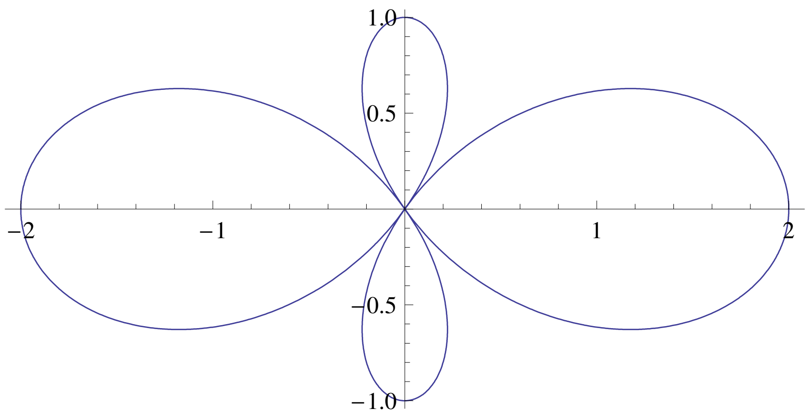


   Der führende Term ist der Quadrupolbeitrag:

$$V_Q(r,\theta) = qd^2\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} = \frac{2qd^2 P_2(\cos\theta)}{r^3}, \tag{1}$$

   wobei $P_l(\cos\theta)$ die Legendrepolynome sind.

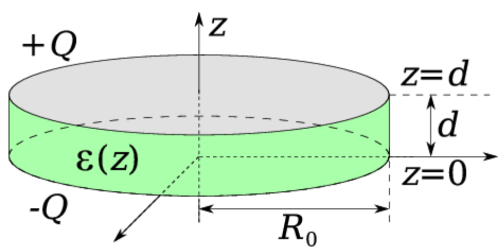
(c) Die Winkelabhängigkeit des Potentials sieht wie folgt aus (um 90° drehen und um die Längsachse rotieren. SphericalPlot3D in Mathematica gibt hübschere Resultate.):



2. **Kreisförmige Plattenkondensatoren**
Gegeben sei eine Anordnung von zwei unendlich dünnen parallelen kreisförmigen Metallplatten mit Radius R_0, Abstand $d \ll R_0$ und den freien Gesamtladungen $+Q$ bzw. $-Q$ (siehe Abbildung). Der Raum zwischen den Platten sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Dielektrizitätskonstante gemäß $\epsilon(z) = 1 + 4\pi\chi_e z/d$ vom Ort abhängt, wobei $\chi_e > 0$ ist.

   (a) Berechnen Sie die elektrische Feldstärker $\vec{E}$, das Polarisationsfeld $\vec{P}$ und das Verschiebungsfeld $\vec{D}$ im Dielektrikum.

   (b) Berechnen Sie die Flächenladungsdichten freier Ladungen und Polarisationsladungen bei $z = d$ und $z = 0$, sowie die Polarisations-Raumladungsdichte im Dielektrikum.



*L*ösung:

   (a) Da $d \ll R_0$ ist, können wir Randeffekte vernachlässigen. Dies bedeutet, dass $\vec{D}$, $\vec{E}$ und $\vec{P}$ nur von z abhängen und in z-Richtung zeigen. Somit ergibt sich im Dielektrikum das folgende Verschiebungsfeld

$$\vec{D} = -\frac{4Q}{R_0^2}\vec{e}_z\,. \tag{2}$$

Die elektrische Feldstärke und das elektrische Polarisationsfeld folgen dann trivial

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\vec{D}}{\epsilon(z)} = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{1+4\pi\chi_e\frac{z}{d}}\vec{e}_z\,,\\ \vec{P} &= \chi_e\frac{z}{d}\vec{E} = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{\chi_e\frac{z}{d}}{1+4\pi\chi_e\frac{z}{d}}\vec{e}_z\,,\end{aligned} \tag{3}$$

(b) Die freien Flächenladungsdichten sind

$$\sigma(z=0) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\,, \qquad \sigma(z=d) = \frac{Q}{\pi R_0^2}\,, \tag{4}$$

Die Polarisationsflächenladungsdichte ist definiert durch $\sigma_P =: -\vec{n}\cdot(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$, was in unserem Fall zu

$$\begin{aligned}\sigma_P(z=0) &= -P(z=0) = 0\,,\\ \sigma_P(z=d) &= P(z=d) = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{\chi_e}{1+4\pi\chi_e}\,,\end{aligned} \tag{5}$$

führt. Die Polarisationsladungsdichte im Dielektrikum ist

$$\rho_p(z) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(z) = -\partial_z P_z(z) = \frac{4Q}{R_0^2\,d}\frac{\chi_e}{\left(1+4\pi\chi_e\frac{z}{d}\right)^2}\,. \tag{6}$$

3. **Hohlraum in Dielektrikum**

Ein allseitig unendlich ausgedehntes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ sei homogen polarisiert mit Polarisation $\vec{P}_0$.

(a) Welche Feldstärke $\vec{E}_0$ herrscht dann im Dielektrikum?

(b) In dem polarisierten Dielektrikum werde ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius a erzeugt. Schreiben Sie für das Potential ϕ und die Feldstärke $\vec{E}$ die im Innen- und Außenraum der Kugel geltenden Feldgleichungen an. Welche Stetigkeits- bzw. Randbedingungen müssen ϕ und $\vec{E}$ auf der Kugeloberfläche und im Unendlichen erfüllen?

(c) Zeigen Sie durch Lösen der Feldgleichungen, dass für die elektrische Feldstärke im Hohlraum

$$\vec{E} = \frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)\,(\epsilon-1)}\vec{P}_0 \tag{7}$$

gilt. Ist der Betrag dieser Feldstärke kleiner oder größer als jener von $\vec{E}_0$, d.h. hat die Feldstärke durch Erzeugen des Hohlraumes in diesem Raumbereich ab- oder zugenommen?

(Anleitung: Wähle den Kugelmittelpunkt als Koordinatenursprung und die Richtung von $\vec{P}_0$ als z-Richtung.)

*L*ösung:

(a) $\vec{D}_0 = \epsilon\vec{E}_0 = \vec{E}_0 + 4\pi\vec{P}_0$.
$\rightarrow \qquad \vec{E}_0 = \frac{4\pi}{\epsilon-1}\vec{P}_0$.

(b) Die Feldgleichungen für $\vec{E}(\vec{r})$ lauten:
$\text{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0$, $\text{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$, für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:

$$E_r^i(r=a,\theta) = \epsilon E_r^a(r=a,\theta), \tag{8}$$

$$E_\theta^i(r=a,\theta) = E_\theta^a(r=a,\theta). \tag{9}$$

$$E_r^a(r\to\infty,\theta) \to E_0\cos\theta. \tag{10}$$

Die Feldgleichungen für $\phi(\vec{r})$ lauten:
$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:

$$\left.\frac{\partial\phi_i(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon \left.\frac{\partial\phi_a(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}. \tag{11}$$

$$\phi_i(r=a,\theta) = \phi_a(r=a,\theta) + c. \tag{12}$$

$$-\left.\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r\to\infty} \to E_0\cos\theta. \tag{13}$$

Die Konstante c (ein Sprung im Potential) muss verschwinden, weil sie auf ein E-Feld proportional zu $\delta(r-a)$ fhren wrde

(c) Im Innenraum $r < a$ gilt:
$\phi(r,\theta) = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}P_0\underbrace{r\cos\theta}_{z}$
$\vec{E}(r,\theta) = \frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}\vec{P}_0$.
$\left|\vec{E}\right| = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1}\left|\vec{E}_0\right| > \left|\vec{E}_0\right|$, da $\epsilon > 1$.

Ankreuzbar: 1, 2a, 2b, 3ab, 3c