Übungsblatt 9

für das Tutorium am 02.06.2017

1. **Anisotropes Medium**
Gegeben sei eine Punktladung, q, im Ursprung des Koordinatensystems in einem homogenen anisotropen Dielektrikum. Der dazugehörige ε-Tensor lautet:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{ij} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie das Potenzial der Punktladung. Hinweis: Führen Sie diese Situation auf das bekannte analoge Problem im Vakuum zurück.

(b) Bestimmen Sie die Äquipotentialflächen.

(c) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld.

(d) Verallgemeinern Sie das Resultat von Punkt a.) für den Fall eines allgemeinen symmetrischen und positiv-definiten ε-Tensors.
Hinweis: https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratwurzel_einer_Matrix

Lösung: Hier wird zuerst die allgemeine Lösung, also Punkt d) diskutiert. Der Spezialfall für a), b) und c) ergibt sich daraus auf einfache Weise.

Aus $\mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho_f$ folgt

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\Phi = -4\pi\rho_f, \tag{2}$$

wobei ausgenützt wurde, dass das Medium homogen also ε konstant ist. Mit einer geeigneten Koordinatentransformation (siehe Hnweis) findet man

$$\tilde{\Delta}\Phi(\tilde{\vec{x}}) = -4\pi\frac{q}{\sqrt{\det\varepsilon}}\delta^{(3)}(\tilde{\vec{x}}). \tag{3}$$

Dies wiederum ist die übliche Poissongleichung für ein Punktladung $q/\sqrt{\det\varepsilon}$ am Ursprung, also erhält man

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(\tilde{\vec{x}}) = \frac{q}{\sqrt{\det\varepsilon}\sqrt{\tilde{x}^i\tilde{x}^i}} = \frac{q}{\sqrt{\det\varepsilon}\sqrt{x^i x^j(\varepsilon^{-1})_{ij}}}. \tag{4}$$

Die Äquipotentialflächen sind Ellipsoide. Deren Hauptachsen sind gegenüber dem ursprüngichen Koordinatenachsen verdreht (diese Rotation ist durch die Matrix Q definiert) und die Längen der Hauptachsen sind durch die Einträge von $\delta^{1/2}$ definiert.

Für das elektrische Feld findet man

$$E_i = \frac{q}{\sqrt{\det \varepsilon}\,\left(x^k x^l (\varepsilon^{-1})_{kl}\right)^{3/2}} (\varepsilon^{-1})_{ij} x_j \tag{5}$$

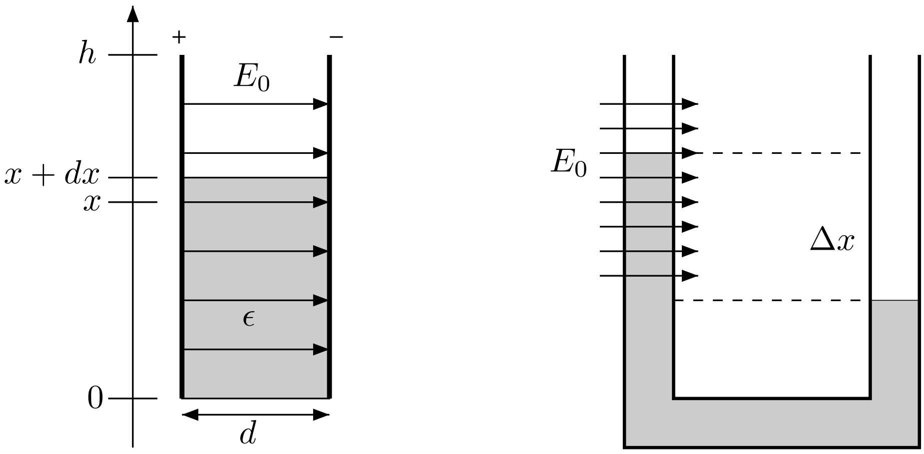
Im Spezialfall reduziert sich das zu

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon_1} + \frac{y^2}{\varepsilon_2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3}}} \tag{6}$$

und

$$E_i = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\left(\frac{x^2}{\varepsilon_1} + \frac{y^2}{\varepsilon_2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3}\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x/\varepsilon_1 \\ y/\varepsilon_2 \\ z/\varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2. **Steighöhenmethode**
   Auf einen begrenzten dielektrischen Körper wirkt im elektrischen Feld eine "pondemotorische" Kraft. Um diese zu berechnen soll ein Plattenkondensator (Plattenabstand d, Höhe h, Breite der Platten b) betrachtet werden, dessen Zwischenraum bis zur Position x ein Dielektrikum der Permittivität ϵ und der Massendichte ρ_m ausfüllt, während der restliche Raum leer ist.



   (a) Berechnen Sie die Kapazität $C(x)$ des Kondensators.

   (b) Der Kondensator sei an eine Batterie angeschlossen, sodass die Platten auf konstanter Potentialdifferenz V gehalten werden. Berechnen Sie, die Kraft mit der das Dielektrikum in den Kondensator hineingezogen wird und drücke das Resultat durch das elektrische Feld E_0 zwischen den Kondensatorplatten aus. Um das Resultat zu erhalten, betrachte die Energiebilanz, wenn das Dielektrikum um dx verschoben wird.

(c) Die Permittivität ϵ einer Flüssigkeit mit Massendichte ρ_m lässt sich messen, indem man sie in ein U-förmiges Rohr füllt und einen Schenkel in ein homogenes elektrisches Feld E_0 einbringt. Wie lautet der Zusammenhang zwischen ϵ und der durch das Feld hervorgerufenen Steighöhe Δx der Flüssigkeit?

Lösung:

(a) Die Gesamtkapazität ist eine lineare Funktion der Eindringtiefe des Dielektrikums

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{b}{d}\left[x(\epsilon - 1) + h\right]. \tag{8}$$

(b) Die gesuchte pondemotorische Kraft lautet nun

$$F = \frac{1}{8\pi} bd(\epsilon - 1)E_0^2, \tag{9}$$

wobei im letzten Schritt $E_0 = V/d$ verwendet wurde.

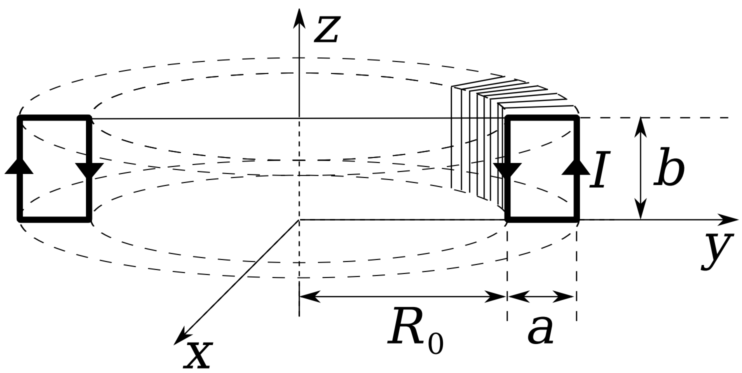
(c) Bestimmung von ϵ aus der Steighöhe Δx:

$$\epsilon = 1 + \frac{8\pi\rho_m g}{E_0^2}\Delta x \tag{10}$$

Wie zu erwarten war ist das Resultat nicht von der Geometrie des Kondensators abhängig.

3. **Toroidale Spule mit rechteckigem Querschnitt**

Eine sehr fein und gleichmäßig gewickelte Spule mit N Windungen sei um einen in sich ringförmig geschlossenen Spulenkörper gewickelt. Dieser Spulenkörper ergebe sich durch Rotation eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b um die z-Achse mit Innenabstand R_0 (siehe Skizze). Durch die Spule werde ein Strom I geschickt.



(a) Welches Magnetfeld ergibt sich im Inneren und Äußeren dieser Spule?

(b) Berechnen Sie außerdem den magnetischen Fluss durch die Spule und ihre Selbstinduktion. Hat für $b > a$ die gegebene Spule die größere Selbstinduktion, oder die Spule mit a und b vertauscht (sonstige Parameter gleich)?

Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst, dass das Magnetfeld von der Form $\vec{B}(x, y, z) = B(\rho, z)\vec{e}_\varphi$ ist (mit ρ, φ, z Zylinderkoordinaten), und wenden Sie dann die Integralform des Oerstedschen Gesetzes über eine geeignete Fläche an, um das Magnetfeld im Innen- und Außenraum zu berechnen.

Lösung:

(a) Das Magnetfeld hat nur eine $\vec{e}_\varphi$-Komponente aufgrund der Spiegelsymmetrie. Die Spiegelsymmetrie ist (annähernd) für eine sehr fein gewickelte Spule erfüllt.

Für das Oerstedsche Gesetz nimmt man eine Kreisfläche mit Radius r. Innerhalb der Spule: Gesamtstrom NI. Außerhalb der Spule: Gesamtstrom 0. Außen: $B_\varphi = 0$. Innen:

$$B_\varphi = -\frac{2}{c}\frac{IN}{r}$$

(b) Gesamtfluss:

$$\Phi_N = \frac{2IN^2b}{c} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Selbstinduktion für Gesamtfluss Φ_N:

$$L = \frac{1}{c}\Phi_N \frac{1}{I} = \frac{2N^2b}{c^2} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Die ursprüngliche Orientierung hat die größere Selbstinduktion.

Ankreuzbar: 1a, 1bcd, 2a, 2bc, 3ab