

Übungsblatt 1

für das Tutorium am 10.03.2017

1. Vierervektoren

Gegeben seien Lorentztransformation in x -Richtung $\Lambda^\mu_\nu(\beta)$, in z -Richtung $\Lambda'^\mu_\nu(\beta')$, sowie Drehungen $D^\mu_\nu(\alpha)$ und $D'^\mu_\nu(\alpha')$ um die x - und z -Achse:

$$\Lambda^\mu_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda'^\mu_\nu(\beta') = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & -\beta'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix},$$

$$D^\mu_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad D'^\mu_\nu(\alpha') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha' & -\sin \alpha' & 0 \\ 0 & \sin \alpha' & \cos \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie ein Vierervektor $x^\mu = (ct, x, y, z)$.

- Zeige, dass im Allgemeinen Lorentztransformationen in x - und z -Richtung nicht kommutieren.
- Zeige, dass im Allgemeinen die Lorentztransformation in x -Richtung nicht mit einer Drehung um die z -Achse kommutiert.
- Kommutieren im Allgemeinen Elemente der Drehgruppe $SO(3)$?
- Kommutieren im Allgemeinen Elemente der Drehgruppe $SO(2)$?
- Um welche Achse müsste man eine Drehung ansetzen, damit diese stets mit einer Lorentztransformation in x -Richtung kommutiert?

2. Bewegter Stab

Ein Stab befindet sich in einem Inertialsystem S in der xy -Ebene und bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}c$ in y -Richtung. Die Länge des Stabes in S ist L und der Stab sei so ausgerichtet, dass er mit der x -Achse einen Winkel α einschliesst (siehe Abbildung 1).

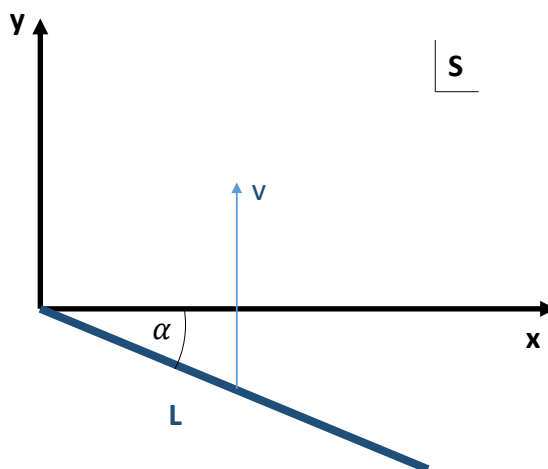


Abbildung 1: Stab in S zum Zeitpunkt $t = 0$.

- (a) Wie groß ist die Ruhelänge L_0 des Stabes für $\alpha = 30^\circ$?
- (b) Gibt es für $\alpha = 45^\circ$ ein Inertialsystem S' , das sich mit Geschwindigkeit V relativ zur x -Richtung bewegt, in dem der Stab parallel zur x' -Achse ist? Wie groß ist V ?
- (c) Gibt es für $\alpha = 30^\circ$ ein Inertialsystem S' , das sich mit Geschwindigkeit V relativ zur x -Richtung bewegt, in dem der Stab parallel zur x' -Achse ist? Wie groß ist V ?
- (d) Welche Länge L' besitzt der Stab in S' aus Teil (c)? Was ist seine Geschwindigkeit \vec{v}' ?

3. Spaß mit Einheiten

- (a) Schreibe die Minkowski Metrik in 'Schiffseinheiten', $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(c_0^2, -c_1^2, -c_2^2, -c_3^2)$, so dass das entsprechende Linienelement die Form $ds^2 = c_0^2 dt^2 - c_1^2 dx^2 - c_2^2 dy^2 - c_3^2 dz^2$ annimmt. Bestimmen Sie c_0, c_1, c_2 und c_3 unter den folgenden Voraussetzungen: das Linienelement ds wird in Yard gemessen, die Zeit wird in Sekunden gemessen, die Entfernung des Schiffes vom Ufer in Bewegungsrichtung in Knoten mal Stunden (x -Komponente), die Entfernung des Schiffes vom Ufer senkrecht zur Bewegungsrichtung in Seemeilen (y -Komponente) und die Höhe des Schiffes (z -Komponente) in Metern.

Hinweise: 1 Yard = 0.9144 Meter, 1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde, 1 Sekunde = 299792458 Meter/Lichtgeschwindigkeit, 1 Seemeile = 1852 Meter.

- (b) Von nun an setzen wir $c = 1$ wie in der Vorlesung (bzw. alle $c_\mu = 1$ in der Minkowski Metrik oben), um uns das Leben zu erleichtern. Bestimme deine Größe in Sekunden, dein Alter in Metern und deine Ruheenergie in Kilogramm. Die Polizei stoppt dein Auto auf der Autobahn (Geschwindigkeitsbeschränkung $v \leq 130 \text{ km/h}$) mit einer Geschwindigkeit von $v = 10^{-7}$. Warst du zu schnell unterwegs?

Ankreuzbar: 1ab, 1cde, 2ab, 2cd, 3ab