Übungsblatt 1

für das Tutorium am 09.03.2018

1. **Satz von Gauß**
   Verifiziere den Satz von Gauß für das Vektorfeld
   $$\vec{F} = (2x - z, x^2 y, -xz^2)^T \,, \tag{1}$$
   wobei das Integrationsvolumen durch $x, y, z \in [0, 1]$ begrenzt wird.

   (a) Berechne $\oint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$.

   (b) Berechne $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$.

   Lösung:

   Wir berechnen die beiden Seiten des Satzes von Gauß
   $$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, df = \int_V \mathrm{div} \vec{F}\, dV \tag{2}$$
   getrennt, wobei S die Würfeloberfläche und V das Würfelvolumen ist. Man findet, dass beide Seiten $\frac{11}{6}$ ergeben.

2. **Satz von Stokes**
   Verifiziere den Satz von Stokes für ein Vektorfeld $\vec{F} = (x^2+y^2, y, z^2)^T$ und eine Fläche S, definiert durch ein Rotationsparaboloid, gegeben durch
   $$z = R^2 - x^2 - y^2 \,, \qquad z \geq 0 \,, \quad R \geq 0. \tag{3}$$

   (a) Berechne $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

   (b) Berechne $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}$.

   Lösung:

   (a) Der Rand des Rotationsparaboloids ist bei $z = 0$ und ist gegeben durch
   $$x^2 + y^2 = R^2. \tag{4}$$
   Das ist ein Kreis mit Radius R. Die Randkurve ist parametrisiert durch
   $$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \,, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi \,. \tag{5}$$
   Die Winkelintegration macht das Ergebnis trivial.

(b) Die Oberfläche des Paraboloids kann als die Niveaufläche einer skalaren Funktion $\phi = z + x^2 + y^2$ aufgefasst werden. Der Gradient von ϕ steht normal auf der Fläche. Der normierte Normalenvektor ist somit $\vec{n} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$.
Nun führen wir wieder Zylinderkoordinaten ein, also:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z \qquad 0 \leq r \leq R \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{6}$$

Das Flächenelement kann man durch $dxdy$ ausdrücken, wenn man sich überlegt, dass $dxdy$ die Projektion von dA auf die (x, y)-Ebene ist. $|\vec{n}\cdot\vec{e}_z|dA = \frac{dA}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} = dxdy = rdrd\varphi$. Somit kürzt sich der Faktor $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ im Flächenelement $d\vec{A} = \vec{n}dA$. Man braucht die r-Integration nicht ausführen, da die Winkelintegration wieder zu einem trivialen Ergebnis führt.

3. **Indexgymnastik**

(a) Zeige, dass das Vektorprodukt nicht assoziativ ist.

(b) Berechne Divergenz und Rotation von $\vec{a} \times \vec{b}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektorfelder sind, die von $\vec{r} = x_i$ abhängen.

(c) Sei $\vec{r} = x_i$, $r = (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ und $\vec{r'} \neq \vec{r}$. Berechne die Divergenz von $\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$.

(d) Berechne $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r}f(r)\right)$, wobei die skalare Funktion f nur von r abhängt.

Lösung:

(a) Benutzen der Identität $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ führt zu zwei im allgemeinen unterschiedlichen Ausrücken.

(b) Obige Identität und eine kurze Rechnung mit Indizes führt auf

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \;=\; \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b}) \tag{7}$$

und

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \;=\; (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}\,. \tag{8}$$

(c) Wir verwenden $\partial_i r'_i = \partial_i r'_j = 0$, da $\vec{r} \neq \vec{r'}$. Damit berechnen wir

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \;=\; 0\,. \tag{9}$$

(d) Wir verwenden $\partial_i x_j = \delta_{ij}$ und

$$\partial_i f(r) = \frac{\partial}{\partial x_i}f(r) = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x_i}{r}\partial_r f(r)\,. \tag{10}$$

Dann zeigt man, dass

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r}f(r)\right) \;=\; \frac{f(r)}{r}\left[\vec{a} - \frac{\vec{r}}{r}\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)\right] + \frac{\vec{r}}{r}\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{\partial f(r)}{\partial r}\,. \tag{11}$$

Ankreuzbar: 1ab, 2a, 2b, 3ab, 3cd