Übungsblatt 2

für das Tutorium am 16.03.2018

1. **Vektorfelder**

   (a) Zeichne folgende Vektorfelder in der x/y-Ebene an den Schnittpunkten von $x = 1, 2, 3$ und $y = 1, 2, 3$ (also 9 Vektoren)

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{y}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   und berechne die Rotation und die Divergenz für beide Felder.

   (b) Schreibe das wirbelfreie Feld als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(x, y, z)$. Ist ϕ eindeutig gegeben? Wie schaut die allgemeine Lösung aus?

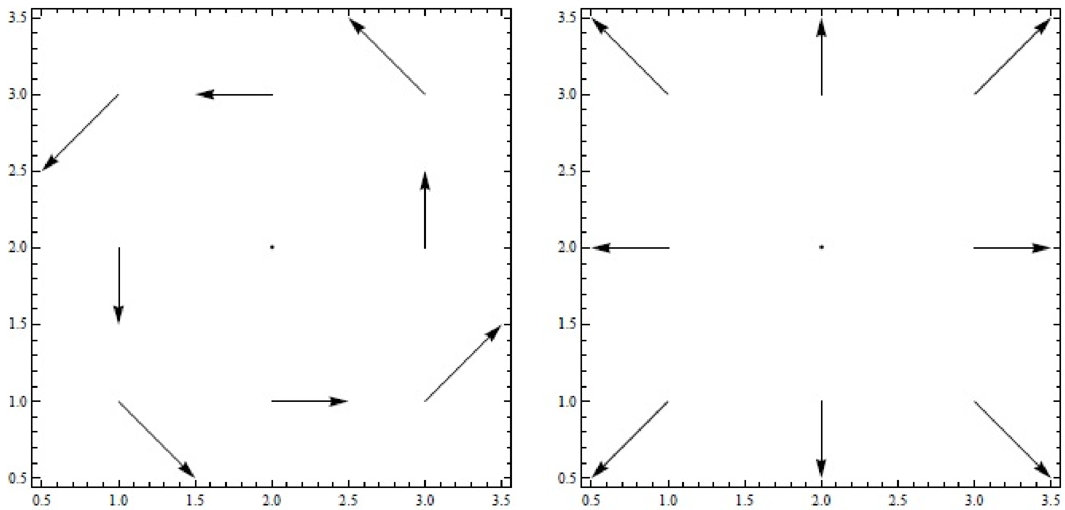
   (c) Schreibe das divergenzfreie Feld als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$. Suche eine Lösung $\vec{A}_1 = (0, 0, ?)^T$ bei der die x- und y-Komponenten verschwinden. Suche eine weitere Lösung $\vec{A}_2 = (?, ?, 0)^T$ bei der die z-Komponente verschwindet. Wie lautet die Rotation der Differenz der beiden Lösungen $\mathrm{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)$? Wie könnte man daher die allgemeine Lösung für $\vec{A}$ anschreiben?

Lösung:

(a) Wir finden folgende Rotationen und Divergenzen:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 1. \tag{2}$$

Die Vektorfelder sehen wie folgt aus:



(b) Allgemein gilt $\vec{E} = (-)\mathrm{grad}\phi$ mit $(-)\phi = \frac{x^2}{4} - x + \frac{y^2}{4} - y + c$ mit beliebiger (Integrations-)Konstante c.

(c) Lösung $\vec{A}_1 = (0, 0, ?)^T$ bei der die x- und y-Komponenten verschwinden:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} + x \end{pmatrix} \tag{3}$$

Lösung $\vec{A}_2 = (?, ?, 0)^T$ bei der die z-Komponente verschwindet:

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} z\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\ -z\left(1 - \frac{y}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Alle Lösungen unterscheiden sich durch ein wirbelfreies Feld voneinander. Das wirbelfreie Feld kann man als Gradient eines Skalarfeldes schreiben. Daher kann man die allgemeine Lösung angeben als $\vec{A} = \vec{A}_1 + \mathrm{grad}\phi_1$ oder $\vec{A} = \vec{A}_2 + \mathrm{grad}\phi_2$ für allgemeine Funktionen $\phi_{1,2} = \phi_{1,2}(x, y, z)$.

2. **Distributionen**

(a) Nimm an, dass die Funktion $g(x)$ bei $x = x_0$ eine isolierte, einfache Nullstelle hat. Zeige, dass $|g'(x_0)|\delta(g(x)) = \delta(x - x_0)$ ist.

(b) Benutze die δ- und θ-Funktionen, um folgende Ladungsverteilungen $\rho(\vec{x})$ mit Gesamtladung Q anzuschreiben:
1) Eine homogene Linienladung bei $x = 2$, $y = 0$ von $z = 0$ bis $z = L$ in Zylinderkoordinaten.
2) Eine Punktladung bei $x = 2$, $y = z = 0$ in Kugelkoordinaten.
Überprüfe die Ergebnisse durch explizite Integration von $\rho(\vec{x})$ über $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

(a) Wir integrieren beide Seiten über das Interval $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$, wobei wir ϵ so klein wählen, dass nur die isolierte Nullstelle bei $x = x_0$ in dem Interval liegt. Führe neue Koordinaten $u = g(x)$ ein.

(b) Die Antworten sind:
1) $\rho(\vec{x}) = \frac{Q}{Lr}\left(\theta(z) - \theta(z - L)\right)\delta(r - 2)\delta(\varphi)\,.$
2) $\rho(\vec{x}) = \frac{Q}{r^2\sin(\theta)}\delta(r - 2)\delta(\varphi)\delta(\theta - \pi/2)\,.$

3. **Krummlinige Koordinaten**

(a) Berechne $\mathrm{div}\vec{R}$ und $\mathrm{rot}\vec{R}$ für $\vec{R} = (x, y, z)$ in kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten.

(b) Berechne $\vec{\nabla} R$ und ΔR mit $R = |\vec{R}|$ in kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten.

Lösung:
Bezüglich der kartesischen Basis $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ haben wir in den jeweiligen Korrdinaten:

$$\vec{R} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{5}$$
$$\vec{R} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z \tag{6}$$
$$\vec{R} = r\cos\varphi\vec{e}_x + r\sin\varphi\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{7}$$

Um die Formeln für Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten zu verwenden müssen wir $\vec{R}$ bezüglich den Basen $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ bzw. $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ schreiben. In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x\sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z\cos\theta \tag{8}$$
$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_x\cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\cos\theta\sin\varphi - \vec{e}_z\sin\theta \tag{9}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi \tag{10}$$

In Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi \tag{11}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi \tag{12}$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{13}$$

Mit $\vec{r}_i = r\vec{e}_i$ bestätigen wir die bekannte Form des Ortsvektors in Kugel und Zylinderkoordinaten

$$\vec{R} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{14}$$
$$\vec{R} = r\vec{e}_r \qquad R = r \tag{15}$$
$$\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \qquad R = \sqrt{r^2 + z^2} \tag{16}$$

Um die gesuchten Größen zu berechnen könnten wir vom Gradienten ausgehen und alles andere unter Berücksichtigung der nichtverschwindenden Ableitungen der Basisvektoren in den gekrümmten Koordinaten ausrechnen.

(a) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ in kartesischen, Kugel- und Zylinderkoordinaten ist:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z \tag{17}$$
$$= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi F_\varphi \tag{18}$$
$$= \frac{1}{r}\partial_r(rF_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi F_\varphi + \partial_z F_z \tag{19}$$

Für die Rotation eines Vektorfeldes gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\vec{e}_x + (\partial_z F_x - \partial_x F_z)\vec{e}_y + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\vec{e}_z && (20)\\
&= \frac{1}{r \sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta F_\varphi) - \partial_\varphi F_\theta)\vec{e}_r + \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi F_r - \partial_r(rF_\varphi))\vec{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r}(\partial_r(rF_\theta) - \partial_\theta F_r)\vec{e}_\varphi && (21)\\
&= (\frac{1}{r}\partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi)\vec{e}_r + (\partial_z F_r - \partial_r F_z)\vec{e}_\varphi + (\frac{1}{r}\partial_r(rF_\varphi) - \frac{1}{r}\partial_\varphi F_r) && (22)
\end{aligned}$$

(b) Der Gradient einer Skalarfunktion f ist:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \partial_x f \vec{e}_x + \partial_y f \vec{e}_y + \partial_z f \vec{e}_z && (23)\\
&= \partial_r f \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta f \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi f \vec{e}_\varphi && (24)\\
&= \partial_r f \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi f \vec{e}_\varphi + \partial_z f \vec{e}_z && (25)
\end{aligned}$$

Der Laplace-Operator ist:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f && (26)\\
&= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\varphi^2 f && (27)\\
&= \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r f) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f && (28)
\end{aligned}$$

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2ab, 3a, 3b