Übungsblatt 3

für das Tutorium am 23.03.2018

1. **Vier Punktladungen**
Betrachte vier Punktladungen q_1 und q_2 an $z = \pm a$ und $x = y = 0$, und q_3 und q_4 an $x = \pm b$ und $y = z = 0$.
   (a) Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und die Gesamtladung.
   (b) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ zunächst für beliebiges $\vec{r}$. Was ist das Feld an $\vec{r} = (0, y, 0)$ für $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$ und $q_1 = -q_2 = q_3 = -q_4$?
   (c) Verwende den Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik um die Kraft von q_1 auf q_2 für den Fall $q_1 = q_2 = q$, $q_3 = q_4 = 0$ als Oberflächenintegral des Maxwell'schen Spannungstensors entlang der Symmetrieebene $z = 0$ auszurechnen.

Lösung:

(a) Die gesamte Ladungsdichte ist

$$\rho(\vec{r}) = \delta(y)\left(q_1\delta(x)\delta(z-a) + q_2\delta(x)\delta(z+a) + q_3\delta(x-b)\delta(z) + q_4\delta(x+b)\delta(z)\right). \tag{1}$$

Die Gesamtladung ist $Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$.

(b) Gegeben eine Ladungsdichte ist das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\,. \tag{2}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) \;=\; & \frac{q_1}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix} + \frac{q_2}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+a \end{pmatrix} \\ & + \frac{q_3}{[(x-b)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-b \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{q_4}{[(x+b)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x+b \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im Fall $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ zeigt das elektrische Feld entlang der y-Achse nur in y-Richtung:

$$\vec{E}^{q_1=q_2=q_3=q_4=q} = \left(\frac{1}{[y^2+a^2]^{3/2}} + \frac{1}{[y^2+b^2]^{3/2}}\right) 2qy\vec{e}_y \tag{3}$$

Im Fall $q_1 = -q_2 = q_3 = -q_4 = q$ zeigt das Feld entlang der y-Achse nur in die x- und z-Richtung und es hat keine Komponente entlang der y-Richtung

$$\vec{E}^{q_1=-q_2=q_3=-q_4=q} = \frac{-2qb}{[y^2+b^2]^{3/2}}\vec{e}_x + \frac{-2qa}{[y^2+a^2]^{3/2}}\vec{e}_z \tag{4}$$

(c) Der Impulserhaltungssatz der Elektrodynamik besagt

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_V^{mech} + \vec{P}_V^{em})_k = \oint_{\partial V} df_i T_{ik}, \tag{5}$$

wobei T_{ik} der Maxwell'sche Spannungstensor ist:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\right]. \tag{6}$$

Da wir an der Kraft auf die "untere" Ladung interessiert sind, wählen wir V als den unteren Halbraum $z < 0$. Da die Felder im Unendlichen verschwinden, ist der einzige Beitrag zum Oberflächenintegral entlang der Ebene $z = 0$ mit $d\vec{f} = \vec{e}_z dxdy$. Deshalb benötigen wir nur die z-Komponente des Spannungstensors. Das elektrische Feld an $z = 0$ lesen wir aus dem Resultat aus Aufgabe (b) ab. Die Kraft zeigt in negative z-Richtung, also von der anderen Ladung weg, und ist proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen. Das ist die Coulombkraft.

2. **Monopole und elektrisch-magnetische Dualität**

(a) Betrachte die Maxwellgleichungen im Vakuum ohne äussere Quellen (in Gauß-Einheiten). Zeige, dass die Gleichungen invariant unter elektrisch-magnetischer Dualität $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$ sind. Gilt die Dualität auch noch in Anwesenheit von Quellen?

(b) Nimm nun an, dass neben elektrischen Ladungen und Strömen $(\rho_e, \vec{j}_e)$ auch noch magnetische Ladungen und Ströme $(\rho_m, \vec{j}_m)$ existieren[1], die sich analog zu den elektrischen Größen verhalten. Wie sehen die Maxwellgleichungen in diesem Fall aus?

(c) Zeige, dass die Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen invariant unter einer allgemeineren Version der elektrisch-magnetischen Dualität sind, wo Felder und Quellen in Linearkombinationen derselben transformieren. Wie sehen die Transformationseigenschaften der Felder und Quellen aus?
Hinweis: Es geht allgemeiner als nur der Austausch der Feldstärken: Führe eine Winkelvariable ξ ein. Dann transformiert zum Beispiel das elektrische Feld als $\vec{E}' = \vec{E}\cos\xi - \vec{B}\sin\xi$. Wie sehen die Transformationen der anderen Größen aus? Was bedeuten die Spezialfälle $\xi = 0$ und $\xi = \frac{\pi}{2}$?

[1] Magnetische Monopole sind in der Natur noch nicht beobachtet worden. Sie spielen jedoch in Theorien jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik, z.B. in der Stringtheorie, eine wichtige Rolle.

(d) Zeige, dass die Energiedichte und die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes invariant unter der Dualitätstransformation sind.

Lösung:

(a) Im Vakuum gilt $\vec{B} = \vec{H}$ und $\vec{E} = \vec{D}$. Sind keine äusseren Quellen vorhanden, gilt $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Die Maxwellgleichungen (in Gauß-Einheiten) reduzieren sich also zu

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 && (7) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && (8) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (9) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && (10) \end{aligned}$$

Unter der Dualitätstransformation gehen (7) und (8) sowie (9) und (10) in einander über. In Anwesenheit von elektrischen Ladungen ρ und Strömen $\vec{j}$ sind die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho && (11) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && (12) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (13) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right) && (14) \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass diese nicht mehr invariant unter dem Austausch von elektrischen und magnetischen Feldern sind.

(b) Existieren magnetische Ladungen kann man eine Ladungsdichte ρ_m und einen zugehörigen Strom $\vec{j}_m$ definieren. Die elektrischen Ladungen und Ströme bezeichnen wir nun mit $(\rho_e, \vec{j}_e)$. Unter der Annahme, dass sich die magnetischen Größen analog zu den magnetischen verhalten, bekommen die Maxwellgleichungen in Anwesenheit der magnetischen Monopole folgende symmetrische Form:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e && (15) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 4\pi\rho_m && (16) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\right) && (17) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\right) && (18) \end{aligned}$$

(c) Durch explizites Nachrechnen kann man zeigen, dass die Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen unter den folgenden Transformationen invariant sind:

$$\vec{E}' = \vec{E}\cos\xi - \vec{B}\sin\xi \tag{19}$$

$$\vec{B}' = \vec{B}\cos\xi + \vec{E}\sin\xi \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_e' \\ \vec{j}_e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_e \\ \vec{j}_e \end{pmatrix}\cos\xi - \begin{pmatrix} \rho_m \\ \vec{j}_m \end{pmatrix}\sin\xi \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_m' \\ \vec{j}_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m \\ \vec{j}_m \end{pmatrix}\cos\xi + \begin{pmatrix} \rho_e \\ \vec{j}_e \end{pmatrix}\sin\xi\,. \tag{22}$$

(d) Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \tag{23}$$

Die Energieflussdichte ist durch den Poynting-Vektor gegeben:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}). \tag{24}$$

Die Invarianz folgt wieder durch explizite Berechnung von w'_{em} und $\vec{S}'$.

3. **Kugel mit Loch**
Betrachte eine homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q.

(a) Berechne die elektrische Feldstärke mithilfe des Gauß'schen Gesetzes.
Hinweis: Verwende das Gauß'sche Gesetz in Integralform für ein passend gewähltes Volumen.

(b) Innerhalb der Kugel befinde sich ein kugelförmiges Loch mit Radius $R' < R$, im Abstand $\vec{a}$ vom Zentrum. Bestimme das elektrische Feld innerhalb des Hohlraums.
Hinweis: Verwende das Superpositionsprinzip.

Lösung:

(a) Das Gauß'sche Gesetz in Integralform lautet:

$$\oint_S \vec{E}(t,\vec{r})d\vec{f} = 4\pi\int_V dV'\rho(t,\vec{r}') \equiv 4\pi Q_V(t) \tag{25}$$

Nachdem alle Größen zeitlich konstant sind, haben wir keine t-Abhängigkeit. Die Ladungsdichte lässt sich besonders elegant mit einer Θ-Funktion anschreiben

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0\Theta(R-r) = \frac{Q}{V}\Theta(R-r) = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}\Theta(R-r) \tag{26}$$

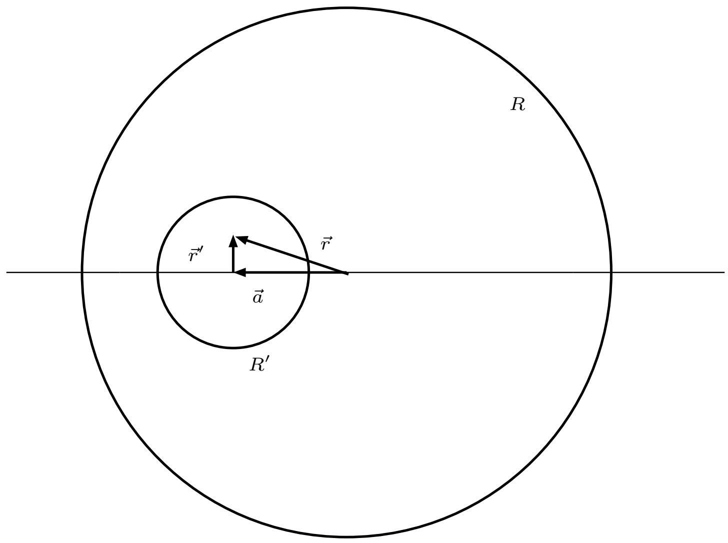

Figure 1: Kugel mit Loch.

Wir benötigen nun ein Volumen V auf dem das Feld konstant ist. Aufgrund der sphärischen Symmetrie wählen wir eine Kugel mit Radius r. Wir verwenden Kugelkoordinaten. Für die rechte Seite müssen wir eine Fallunterscheidung machen, je nachdem ob der Raduis der Kugel größer oder kleiner als der Radius der geladenen Kugel ist. Linke und rechte Seite zusammen ergeben dann das Resultat

$$\vec{E}(r) = \vec{e}_r Q \begin{cases} \frac{r}{R^3} & r < R \\ \frac{1}{r^2} & r > R \end{cases} \tag{27}$$

Im Inneren der Kugel steigt das Feld linear mit dem Abstand vom Ursprung an, ausserhalb hat man eine $1/r^2$-Abhängigkeit. Das Feld ist stetig an $r = R$.

(b) Der Hohlraum lässt sich dadurch beschreiben, dass man eine fiktive "Antikugel" mit Radius R' einführt, die die negative Ladungsdichte $-\rho_0$ trägt. Nach dem Superpositionsprinzip ist die Feldstärke durch die Summe der Feldstärken von Kugel und Antikugel $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ gegeben, siehe Abbildung 1. Es folgt daher:

$$\vec{E} = Q\frac{\vec{a}}{R^3} \tag{28}$$

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2ab, 2cd, 3ab