Übungsblatt 4

für das Tutorium am 13.04.2018

1. **Punktladung**
Eine Punktladung mit Ladung q befinde sich an der Stelle $x = y = 0$, $z = a > 0$.

   (a) Schreibe die Ladungsdichte $\rho(\vec{x}) = \rho(x, y, z)$ mithilfe von δ-Funktionen an und überprüfe
$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = q. \tag{1}$$

   (b) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ und das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$ als Integrale über die Ladungsdichte und verifiziere $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$.

   (c) Berechne Rotation und Divergenz des elektrischen Feldes.
Hinweis: Für den Fall $\vec{x} = (0, 0, a)$ sollen folgende Definition der Divergenz und Rotation benutzt werden:
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S=\partial V} d\vec{A} \times \vec{F} \tag{2}$$
für ein beliebiges Volumen V um $\vec{x} = (0, 0, a)$.

Lösung:

   (a) Die Ladungsdichte ist $\rho(\vec{x}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a)$.

   (b) Das elektrische Feld ist $\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \rho(\vec{x}' = q \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-a)\vec{e}_z}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}$. Das Potential ist $\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$.

   (c) Für $(x, y, z) \neq (0, 0, a)$ gilt $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = 0$. Bei $\vec{x} = (0, 0, a)$ divergiert $\vec{E}$. Wir schliessen die Ladung im Volumen einer Kugel ein. Definiere $d\vec{A} = \vec{n}dA = \vec{n}\tilde{r}^2 d\Omega$ mit $\tilde{r}^2 = x^2 + y^2 + (z - a)^2$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-a)\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$. Wir verwenden die Formel in der Angabe um die Divergenz zu berechnen: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{4\pi q}{V}$. Wir verwenden die Formel in der Angabe um die Rotation zu berechnen: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

2. **Elektrische Feldenergie**
Für die elektrostatische Energie W einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gelten die beiden äquivalenten Gleichungen
$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}), \tag{3}$$
$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2. \tag{4}$$

Berechne die elektrostatische Energie für eine unendlich dünne Kugelschale bei der die Ladung gleichmässig auf der Oberfläche verteilt ist (Radius R, Gesamtladung Q, Flächenladungsdichte σ).

(a) Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$.

(b) Berechne das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(c) Überprüfe, dass die Randbedingungen des elektrischen Feldes bei $r = R$ erfüllt sind.

(d) Berechne die Feldenergie mit Gleichung (3).

(e) Berechne die Feldenergie mit Gleichung (4).

Lösung:

(a) Die Ladungsdichte ist $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(r - R)$ wobei $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$.

(b) Für die Berechnung des Potentials verwenden wir Kugelkoordinaten mit $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$.

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = Q\begin{cases} \frac{1}{r} & r \geq R \\ \frac{1}{R} & r < R \end{cases} \tag{5}$$

Differentiation ergibt die Feldstärke. Die geladene Hohlkugel ist also ein Faradayscher Käfig.

(c) Die Tangentialkomponenten müssen stetig sein an $r = R$. In Anwesenheit einer Oberflächenladung σ hat die Normalkomponente eine Unstetigkeit $E_{n_2} - E_{n_1} = 4\pi\sigma$.

(d) und (e) ergeben $W = \frac{Q^2}{2R}$.

3. **Geladener Zylinder**

Ein unendlich langer Zylinder mit dem Radius a sei in seinem Inneren homogen geladen (Volumsladungsdichte ρ_0) und trage auf seiner Mantelfläche eine konstante Flächenladungsverteilung (Flächenladungsdichte σ_0).

(a) Berechne das elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$ durch Lösen der Poissongleichung. *Hinweis:* Vereinfache die Differentialgleichung durch Symmetrieüberlegungen.

(b) Berechne die elektrische Feldstärke.

Lösung:

(a) Die Poissongleichung ist

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{6}$$

Um die Gleichung zu lösen nutzen wir die Symmetrie aus. Wir legen den Zylinder entlang der z-Achse und den Koordinatenursprung entlang der Zylinderachse. Der Querschnitt ist ein Kreis mit Radius a in der xy-Ebene. Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \Theta(r-a) + \sigma_0 \delta(r-a). \tag{7}$$

Damit ist die Gesamtladung pro Längeneinheit $Q_L = \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^\infty dr \rho(\vec{r}) = \pi a^2 \rho_0 + 2\pi a \sigma_0$.

Wir verwenden Zylinderkoordinaten. Der Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten ist (siehe Übungsblatt 2)

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\phi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\phi + \partial_z^2\phi. \tag{8}$$

Die Differentialgleichung vereinfacht sich aufgrund von Symmetrieüberlegungen. Durch die homogene Ladungsverteilung ist die Konfiguration symmetrisch bezüglich Rotation um die z-Achse. Das Potenzial wird also nicht vom Polarwinkel φ abhängen. Aufgrund der unendlichen Ausdehnug des Zylinders haben wir auch Translationsinvarianz bezüglich der z-Achse, weshalb ϕ auch nicht von z abhängen kann. Daher folgern wir $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$. Der Laplaceoperator reduziert sich zu

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right). \tag{9}$$

Wir müssen zwischen dem Innen- und dem Aussenraum des Zylinders unterscheiden. Wir beginnen mit $r < a$ (innen). Dort lautet die Differentialgeichung

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = -4\pi\rho_0. \tag{10}$$

Aus der Bedingung, dass das Potenzial an $r = 0$ regulär sein muss, folgt $\phi(r) = -\pi\rho_0 r^2 + C_2$.

Nun betrachten wir den Aussenraum $r > a$. Wir finden $\phi(r) = C_3 \log r + C_4$. Die Konstante C_4 kann willkürlich gewählt werden. Die beste Wahl ist $C_4 = -C_3 \log a$, sodass für $r > a$

$$\phi(r) = C_3 \log \frac{r}{a} \tag{11}$$

Die anderen Konstanten werden über die Rand- und Stetigkeitsbedingungen bestimmt. Das Potenzial muss an $r = a$ stetig sein. Das elektrische Feld, also der Gradient von ϕ, muss nicht stetig sein. Aus dem Gauß'schen Gesetz folgt, dass die Komponenten des elektrischen Feldes normal zur Oberfläche sich um die Oberflächenladung unterscheiden. Daraus folgt

$$\phi(r) = \begin{cases} \pi\rho_0(a^2 - r^2) & r \leq a \\ -2Q_L \log\frac{r}{a} & r \geq a \end{cases} \tag{12}$$

(b) Das elektrische Feld ist der Gradient des Potenzials. In Zylinderkoordinaten ist der Gradient $\vec{\nabla}\phi = \partial_r \phi \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi \phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \phi \vec{e}_z$.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2abc, 2de, 3ab