

Übungsblatt 4

für das Tutorium am 13.04.2018

1. Punktladung

Eine Punktladung mit Ladung q befinde sich an der Stelle $x = y = 0, z = a > 0$.

- (a) Schreibe die Ladungsdichte $\rho(\vec{x}) = \rho(x, y, z)$ mithilfe von δ -Funktionen an und überprüfe

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = q. \quad (1)$$

- (b) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ und das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$ als Integrale über die Ladungsdichte und verifiziere $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$.

- (c) Berechne Rotation und Divergenz des elektrischen Feldes.

Hinweis: Für den Fall $\vec{x} = (0, 0, a)$ sollen folgende Definition der Divergenz und Rotation benutzt werden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{S=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{S=\partial V} d\vec{A} \times \vec{F} \quad (2)$$

für ein beliebiges Volumen V um $\vec{x} = (0, 0, a)$.

2. Elektrische Feldenergie

Für die elektrostatische Energie W einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gelten die beiden äquivalenten Gleichungen

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}), \quad (3)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2. \quad (4)$$

Berechne die elektrostatische Energie für eine unendlich dünne Kugelschale bei der die Ladung gleichmässig auf der Oberfläche verteilt ist (Radius R , Gesamtladung Q , Flächenladungsdichte σ).

- Bestimme die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$.
- Berechne das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.
- Überprüfe, dass die Randbedingungen des elektrischen Feldes bei $r = R$ erfüllt sind.
- Berechne die Feldenergie mit Gleichung (3).
- Berechne die Feldenergie mit Gleichung (4).

3. Geladener Zylinder

Ein unendlich langer Zylinder mit dem Radius a sei in seinem Inneren homogen geladen (Volumsladungsdichte ρ_0) und trage auf seiner Mantelfläche eine konstante Flächenladungsverteilung (Flächenladungsdichte σ_0).

- (a) Berechne das elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$ durch Lösen der Poissongleichung.
Hinweis: Vereinfache die Differentialgleichung durch Symmetrieüberlegungen.
- (b) Berechne die elektrische Feldstärke.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2abc, 2de, 3ab