Übungsblatt 5

für das Tutorium am 20.04.2018

1. **Dirichlet-Randwertaufgabe im Halbraum**
Eine unendlich ausgedehnte Leiteroberfläche bei $z = 0$ sei außerhalb einer scheibenförmigen Ausnehmung mit Radius a auf Potential Null gehalten. Die Kreisscheibe $x^2 + y^2 < a^2$ und $z = 0$ sei ebenfalls eine Leiteroberfläche, diese aber (durch eine dünne Isolierung von der geerdeten Leiterplatte getrennt) auf Potential ϕ_0. An der Stelle $\vec{r} = (0, 0, d)$, $d > 0$, befinde sich eine Punktladung q. Berechne das Potential entlang der positiven z-Achse.
Hinweis: Die Dirichlet-Greenfunktion für den Halbraum $z > 0$ lautet

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|(x - x', y - y', z - z')|} - \frac{1}{|(x - x', y - y', z + z')|}. \tag{1}$$

Lösung:
Die angegebene Dirichlet-Green-Funktion verschwindet am Rand des betrachteten Halbraumes: $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}'$ auf ∂V, also für $z' = 0$ und für $\vec{r}'$ im Unendlichen (natürliche Randbedingungen). Für eine Dirichlet-Green-Funktion lässt sich das Potential schreiben als

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d^2\vec{f}' \cdot \underbrace{\phi(\vec{r}')}_{\text{Randbedingung}} \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}'). \tag{2}$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{z'=0} dx'\, dy'\, (-\vec{e}_z) \cdot \phi(\vec{r}')\vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}'). \tag{3}$$

Die Ladungsverteilung ist gegeben durch $\rho(\vec{r}') = q\delta^3(\vec{r}' - d\vec{e}_z) = q\delta(x')\delta(y')\delta(z' - d)$. Übergang zu Zylinderkoordinaten $R^2 = x'^2 + y'^2$ und $dx'\, dy' = 2\pi R\, dR$ liefert

$$\phi|_{x=y=0} = \frac{q}{|z - d|} - \frac{q}{|z + d|} + \phi_0 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right), \text{ für } z > 0. \tag{4}$$

Im Limes $\phi_0 \to 0$ finden wir die Punktladung plus ihre Spiegelladung bei $z = -d$.

2. **Punktladung zwischen gewinkelten Leiterebenen**
Zwei geerdete Leiterebenen trefen sich in einem Winkel von 60° im Ursprung. Eine Punktladung q befinde sich im Abstand r_0 vom Ursprung entlang der x-Achse, sodass der Winkel zwischen der x-Achse und den beiden Platten jeweils 30° beträgt.

   (a) Welche Anordnung von Spiegelladungen löst das Randwertproblem? Skizziere die Anordnung, bestimme die Ortsvektoren der Spielgelladungen und schreibe die Poissongleichung und die Randbedingungen an.

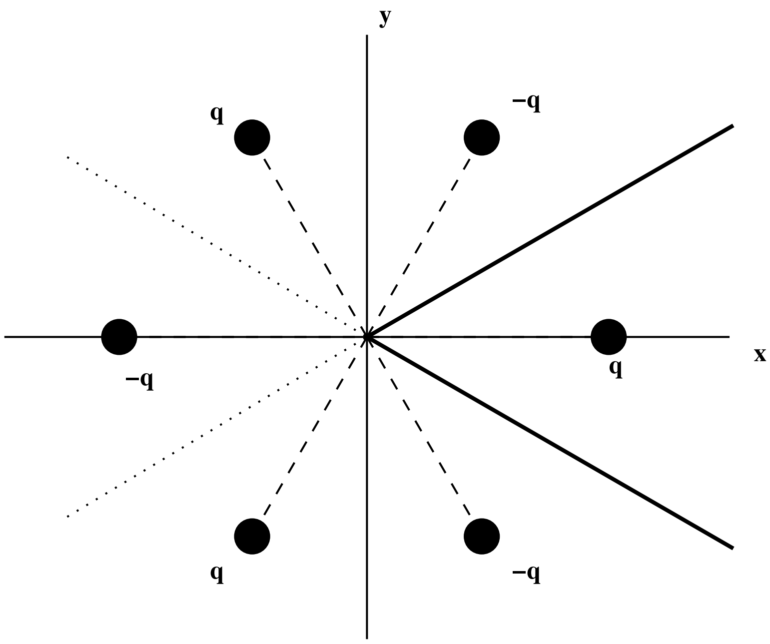


Figure 1: Spiegelladungen

(b) Bestimme das elektrostatische Potential und zeige, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

(c) Bestimme die Oberflächenladungsdichte auf der oberen Leiterebene.

Lösung:

(a) Wir verwenden Polar- bzw. Zylinderkoordinaten. Der Winkel θ ist 0 entlang der x-Achse. Man benötigt 5 Spiegelladungen, die an $\theta = \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$, siehe Abbildung 1. Die Poissongleichung ist:

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho = -4\pi q\delta(x - r_0)\delta(y)\delta(z) \tag{5}$$

Da die Leiterplatten geerdet sind, sind die Randbedingungen:

$$\phi(r, \varphi = \frac{\pi}{6}, z) \;=\; 0 \tag{6}$$

$$\phi(r, \varphi = -\frac{\pi}{6}, z) \;=\; 0, \tag{7}$$

wobei $r > 0$ gilt. Außerdem muss das Potential im Unendlichen verschwinden:

$$\phi(r \to \infty, z \to \infty) \to 0 \tag{8}$$

(b) Das elektrostatische Potential ist:

$$\phi(\vec{x}) \;=\; \sum_{n=0}^{5} \frac{Q_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|}\,. \tag{9}$$

Die Randbedingung an Unendlich ist offensichtlich erfüllt. Für die obere und untere Platte berechnen wir:

$$\phi(r, \varphi = \frac{\pi}{6}, z) = \phi(r, \varphi = -\frac{\pi}{6}, z) = 0 \tag{10}$$

(c) Die Oberflächenladungsdichte ist

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = \frac{1}{4\pi} \vec{n}\vec{E}, \tag{11}$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf die obere Ebene ist und das elektrische Feld am Ort der Ebene ausgewertet werden muss. Da das Potential in Zylinderkoordinaten gegeben ist, rechnen wir das Feld als den negativen Gradienten in Zylinderkoordinaten aus. Hier gibt es keine Vereinfachung, da das Potential von allen Koordinaten abhängt. Allerdings benötigen wir nur die φ-Komponente. Ist die Ebene um einen Winkel φ bezüglich der x-Achse gedreht, ist der Normalvektor gegeben durch

$$\vec{n} = \sin\varphi \vec{e}_x - \cos\varphi \vec{e}_y = -\vec{e}_\varphi. \tag{12}$$

Für die obere Leiterebene ist $\varphi = \frac{\pi}{6}$ Deshalb ist die zu berechnende Ladungsdichte

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left(-\vec{e}_\varphi\right) \left(-\vec{\nabla}\phi\right)\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} \tag{13}$$

Die Terme addieren sich paarweise auf und wir erhalten

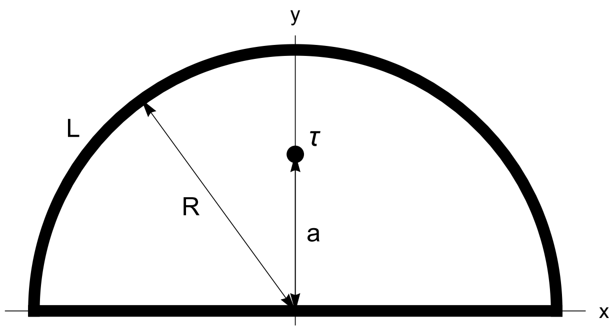
$$\sigma(r, z) = \frac{q r_0}{4\pi} \left[\frac{2}{\left[r^2 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[r^2 - \sqrt{3} r r_0 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[r^2 + \sqrt{3} r r_0 + r_0^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] \tag{14}$$

3. **Geladener Stab im halbzylindrischen Hohlleiter**
Betrachte einen in z-Richtung unendlich ausgedehnten Stab mit der Linienladungsdichte τ. Dieser befinde sich im Inneren eines unendlich langen geerdeten Hohlleiters, L, mit halbkreisförmigen Querschnitt (Radius R) an der Position $x = 0$ und $y = a$.

(a) Berechne das elektrostatische Potential, $\phi(\vec{r})$, für den geladenen Stab an der Position $x = 0$ und $y = a$ im Vakuum.

(b) Gib die Feldstärke, $\vec{E}_A(\vec{r})$, außerhalb des Hohlleiters an und begründe deine Antwort. Wie groß ist die gesamte induzierte Ladung pro Längeneinheit am Hohlleiter? Welche Randbedingungen muss das Potential erfüllen?

(c) Bestimme das Potential für die gesamte Konfiguration und zeige, dass die Randbedingungen erfüllt sind.



Lösung:

(a) Wir umschließen einen Stab mit Linienladungsdichte τ bei $x = y = 0$ mit einem Zylinder der Höhe h und von Radius R und benutzen das Gauss'sche Gesetz. Aus Symmetriegründen (Translation entlang z und Rotation um φ), können wir annehmen, dass $\phi(r, \varphi, z) = \phi(r)$ und $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\vec{e}_r$. Somit erhalten wir nur einen Beitrag von der Zylindermantelfläche

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_0^h \int_0^{2\pi} d\varphi E(R) = 2\pi h E(R) \,. \tag{15}$$

Laut Gauss'schem Gesetz ist dies gleich

$$4\pi \int_V \rho(\vec{r}) = 4\pi \int_V \tau\delta(x)\delta(y) = 4\pi\tau h \,. \tag{16}$$

Somit finden wir $E(R) = \frac{2\tau}{R}$. Dies muss für beliebige R gelten und somit haben wir $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\tau}{r}\vec{e}_r$. Somit ist dann $\phi(r) = -2\tau \log(r) + C = -\tau \log(r^2) + C$. Für einen geladenen Stab bei $x = 0$, $y = a$ finden wir somit folgendes Potential

$$\phi = -\tau \log\left(x^2 + (y-a)^2\right) + C \,. \tag{17}$$

(b) Die Feldstärke, $\vec{E}_A(\vec{r})$, außerhalb des Hohlleiters verschwindet, da der Leiter geerdet ist. Die induzierte Ladung kompensiert also genau die Linienladungsdichte des Stabs. Sie ist somit $-\tau$.
Das Potential muss auf dem Hohlleiter konstant sein und wir können diesen konstanten Wert null setzen. Das heißt, dass $\phi(y = 0) = \phi(x^2 + y^2 = R^2) = 0$.

(c) Zusätzlich zum original Stab bei $\vec{r}_0 = (0, a, 0)^T$ mit Ladungsdichte τ, erhalten wir durch spiegeln an der Kugel einen Stab bei $\vec{r}_1 = (0, b, 0)^T$ mit $b > R$ und Ladungsdichte $-\tau'$. Durch spiegeln an der Ebene $y = 0$ findet man zwei andere Stäbe: bei $\vec{r}_2 = (0, -a, 0)^T$ mit Ladungsdichte $-\tau$ und $\vec{r}_3 = (0, -b, 0)^T$ und mit Ladungsdichte τ'.
Wir finden, dass wir durch unsere spezielle Wahl für die Spiegelung an der Ebene automatisch die Randbedingungen bei $y = 0$ erfüllen, wenn wir die Konstante

Null setzen. Um eine Lösung für b und τ' zu finden, schauen wir uns beliebige Punkte auf dem Halbkreis an und setzen das Potential dort Null. Damit erfüllt die Lösung automatisch alle Randbedingungen.
Wegen der allgemeinen Winkelabhängigkeit führt dies auf $\tau = \tau'$ und $b = \frac{R^2}{a}$.

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2c, 3ab, 3c