Übungsblatt 6

für das Tutorium am 4.5.2018

1. **Plattenkondensator**
Ein Plattenkondensator besteht aus zwei Platten der Fläche A im Abstand d. Die Abmessung der Flächen ist viel grösser als ihr Abstand, sodass Randfelder vernachlässigt werden können.

   (a) Der Plattenkondensator wird mit einer Batterie aufgeladen, sodass die Potenzialdifferenz U_0 ist und die Ladungen der Platten $+Q_1$ und $-Q_1$. Welche Arbeit ist nötig um den Plattenabstand von d nach $d + \Delta d$ zu erhöhen? Wie groß ist die Änderung der Energie des Kondensators?

   (b) Nimm nun an, dass die Batterie angeschlossen bleibt, wenn der Plattenabstand erhöht wird. Wieviel Arbeit muss dann verrichtet werden, um den Abstand von d nach $d + \Delta d$ zu erhöhen? Was ist die Energieänderung in diesem Fall? Zeige, dass die Energie erhalten ist, wenn alle Energiequellen und -senken berücksichtigt werden.

Lösung:

(a) Die Kapazität ist

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{A}{d} \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass die obere (entlang der positiven Richtung) Platte positiv geladen ist, die untere negativ. Die Kraft pro Fläche auf die obere Platte durch das Feld der unteren Platte ist

$$\frac{F}{A} = -\frac{2\pi Q_1^2}{A^2}\,. \tag{2}$$

Die Arbeit, die verrichtet werden muss um die obere Platte um Δd nach oben zu verschieben ist:

$$W = (-F)\Delta d \tag{3}$$

Die Änderung der elektrostatischen Energie ist $\Delta U = W$. Ausgedrückt durch die Potentialdifferenz $U_0 = \frac{Q_1}{C}$ kann die Energie geschrieben werden als:

$$\Delta U = \left(\frac{U_0 A}{4\pi d}\right)^2 \frac{2\pi\Delta d}{A} = \frac{U_0^2 A}{8\pi d^2}\Delta d \tag{4}$$

Alternativ kann man die Energiedifferenz auch so berechnen:

$$\Delta U = \frac{Q_1^2}{2C_f} - \frac{Q_1^2}{2C_i} = \frac{2\pi Q_1^2}{A}(d + \Delta d - d) = \frac{2\pi Q_1^2}{A}\Delta d, \tag{5}$$

wobei C_i und C_f die Kapazitäten vor und nach der Verschiebung sind. Ist keine Batterie angeschlossen, bleibt die Ladung konstant und das Potential wächst.

(b) Da die Batterie angeschlossen bleibt ist das Potential konstant U_0. Die Ladung ändert sich, wenn die Platten von einander entfernt werden. Aufgrund von Energieerhaltung gilt:

$$W_{Kraft} + W_{Batterie} = \Delta U \tag{6}$$

Die Änderung der elektrostatischen Energie ist

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \frac{1}{2}C_f U_0^2 - \frac{1}{2}C_i U_0^2 &(7)\\
&= \frac{AU_0^2}{8\pi}\left(\frac{1}{d+\Delta d} - \frac{1}{d}\right) &(8)\\
&\simeq -\frac{AU_0^2}{8\pi d^2}\Delta d &(9)
\end{aligned}$$

In diesem Fall sinkt also die elektrostatische Energie. Es wird Arbeit von der Batterie verrichtet, da diese Ladung von der unteren zur oberen Platte transportiert:

$$\begin{aligned}
W_{Batterie} &= (Q_f - Q_i)U_0 &(10)\\
&= (C_f - C_i)U_0^2 &(11)\\
&= 2\Delta U = -\frac{AU_0^2}{4\pi d^2}\Delta d &(12)
\end{aligned}$$

Die Arbeit ist negativ, also wird die Batterie dabei aufgeladen. Die Arbeit, die durch die äussere Kraft verrichtet wird ist dieselbe wie in Teilaufgabe (a):

$$W_{Kraft} = F\Delta d = \frac{AU_0^2}{8\pi d^2}\Delta d \tag{13}$$

Die Energieerhaltung ist erfüllt.

2. **Linearer Quadrupol**
Ein linearer Quadrupol besteht aus drei Ladungen q, $-2q$, und q auf der z-Achse. Die positiven Ladungen sind an $z = \pm d$. Die negative Ladung ist am Ursprung.

(a) Argumentiere, dass man dieses System auch durch zwei Dipole beschreiben kann. Was sind die beiden Dipolmomente? Wo liegen die Zentren der Dipole?

(b) Berechne die Monopol-, Dipol- und Quadrupolmomente in kartesischen Koordinaten.

Lösung:

(a) Man teile die Ladung $-2q$ im Ursprung in zwei Ladungen $-q$ und $-q$. Man kombiniere eine der Ladungen mit der Ladung $+q$ an $z = +d$ zu einem Dipol. Die Zentren der Dipole liegen jeweils an $z = \pm\frac{d}{2}$. Die Dipolmomente sind $qd\vec{e}_z$ und $-qd\vec{e}_z$. Das Gesamtdipolmoment verschwindet.

(b) Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\vec{r}) = -2q\delta(x)\delta(y)\delta(z) + q\delta(x)\delta(y)\delta(z-d) + q\delta(x)\delta(y)\delta(z+d) \qquad (14)$$

Damit finden wir ein verschwindendes Monopol- und Dipolmoment. Die Quadrupolmomente verschwinden nicht

$$Q_{ij} \;=\; \int \rho(\vec{r}')\left(3x_i'x_j' - (r')^2\delta_{ij}\right) dV' = 2q \begin{pmatrix} -d^2 & 0 & 0 \\ 0 & -d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2d^2 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

3. **Endlicher geladener Stab und Multipolmomente**
Ein geladener, unendlich langer Stab der Linienladungsdichte τ entlang der z-Achse hat das Potenzial

$$\Phi(x,y,z) = -\tau\ln(x^2+y^2) + c\,, \qquad (16)$$

wobei c eine beliebige Konstante (Eichfreiheit) ist. Betrachte im Folgenden einen endlichen, homogen geladenen Stab mit Gesamtladung Q, der von $z=-L$ bis $z=L$ verläuft.

(a) Berechne (z.B. mittels Green-Funktionen) das Potenzial für $z=0$.
Hinweis: Überlege welche Symmetrien vorliegen und wähle geeignete Koordinaten, $\int \mathrm{d}\alpha/\sqrt{1+\alpha^2} = \ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})$.

(b) Berechne die ersten zwei nichtverschwindenden Terme von $\Phi(x,y,0)$ in der Reihenentwicklungen für $r=\sqrt{x^2+y^2}\gg L$. Finde den führenden Term von $\Phi(x,y,0)$ im Limes $r\ll L$ und vergleiche ihn mit dem Ergebnis für den unendlich langen Stab.

(c) Berechne die ersten beiden nichtverschwindenden Terme des Potenzials in einer kartesischen Multipolentwicklung.

Lösung:

(a) Mit der Formel für das Integral findet man $\Phi(r,z) = -2\tau\ln\left[\frac{r}{L+\sqrt{L^2+r^2}}\right]$.

(b) Limes $r\gg L$
Hierzu ist eine Reihenentwicklung in $\varepsilon := L/r \ll 1$ durchzuführen, was zu

$$\Phi(r,0) \approx \tau\left(\frac{2L}{r} - \frac{L^3}{3r^3} + \dots\right) \qquad (17)$$

führt. Der erste Term entspricht einer Punktladung: $\phi(r,0) = Q/r + \dots$.
Limes kleiner Abstände: $r \ll L$
Dies ist äquivalent zu $r/L\to 0$. Hier gilt es zunächst den Pol bei $\varepsilon := r/L \to 0$ abzuspalten und dann den Rest in einer Taylorreihe in ε zu entwickeln

$$\Phi(r,0) = \tau\left(-2\ln\frac{r}{2L} + \frac{r^2}{2L^2} + \dots\right) \qquad (18)$$

Der führende Term $\Phi = -2\tau\ln r$ entspricht einem unendlich langen Draht.

(c) Nach einfacher Rechnung mit $\rho_{\mathrm{el}}(x, y, z) = \tau\delta^{(2)}(x, y)\theta(L + z)\theta(L - z)$ findet man für die nichtverschwindenden kartesischen Multipolmomente

$$\begin{aligned} Q &= 2L\tau \\ Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz} &= -\frac{2\tau}{3}L^3. \end{aligned} \tag{19}$$

Aus Symmetriegründen verschwindet der Rest. Auf Grund der Spiegelsymmetrie können keine Dipolmomente auftauchen. Auf Grund der Rotationssymmetrie gemeinsam mit der Spuridentität gilt für das Quadrupolmoment $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$ und $Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 3ab, 3c