Übungsblatt 7

für das Tutorium am 18.5.2018

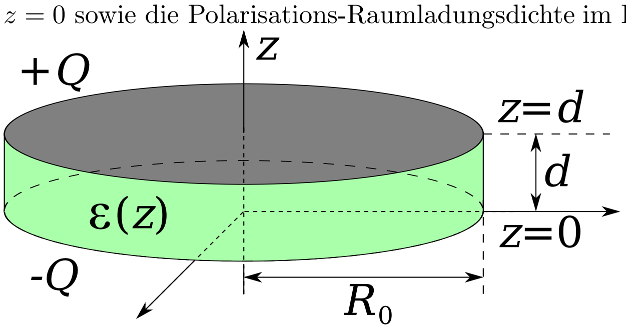
1. **Kreisförmige Plattenkondensatoren**
Gegeben sei eine Anordnung von zwei unendlich dünnen parallelen kreisförmigen Metallplatten mit Radius R_0, Abstand $d \ll R_0$ und den freien Gesamtladungen $+Q$ bzw. $-Q$ (siehe Abbildung). Der Raum zwischen den Platten sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Dielektrizitätskonstante gemäß

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 - \Delta\epsilon \frac{z}{d}$$

vom Ort abhängt ($0 < \Delta\epsilon < \epsilon_0$).

(a) Berechne die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, das Polarisationsfeld $\vec{P}$ und das Verschiebungsfeld $\vec{D}$ im Dielektrikum.

(b) Berechne die Flächenladungsdichten freier Ladungen und Polarisationsladungen bei $z = d$ und $z = 0$ sowie die Polarisations-Raumladungsdichte im Dielektrikum.



Lösung:

(a) Wegen $d \ll R_0$ können Randeffekte vernachlässigt werden: $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ besitzen nur eine z-Komponente, σ, σ_P sind homogen auf den Metallplatten, ρ_P hängt nur von z ab.
Die freie Flächenladungen liegen bei $z = 0$ und $z = d$: $\sigma(z = d) = Q/(\pi R_0^2)$, $\sigma(z = 0) = -Q/(\pi R_0^2)$.
Es ist zweckmäßig, zuerst $\vec{D}$ zu berechnen: $\text{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$, $\text{div}\vec{D} = \partial_z D_z(z) = 4\pi\rho = 0$ innen und außen. Somit ist das $\vec{D}$-Feld im Dielektrikum homogen. An der obere Platte gilt $\text{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{D}_a}_{0} - \underbrace{\vec{D}_i}_{D_z}) = 4\pi\sigma = 4Q/R_0^2$. Somit gilt $\vec{D}(\vec{r}) = -4Q/R_0^2 \vec{e}_z$ im Dielektrikum.
Weiters gilt $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{e}_z$ mit $E_z(z) = D_z/\epsilon(z)$, $\vec{P}(\vec{r}) = P_z(z)\vec{e}_z$, $P_z(z) = \chi_e E_z(z) = \frac{\epsilon-1}{4\pi} E_z(z)$.
Somit ergibt sich

$$E_z(z) = -\frac{4Q}{R_0^2} \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon \frac{z}{d}}, \qquad P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon \frac{z}{d}}\right).$$

(b) Freie Flächenladungsdichte σ: siehe (a).
Die Polarisations-Flächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma_P = -\text{Div}\vec{P} = -\vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{P}_a}_{0} - \underbrace{\vec{P}_i}_{P_z(d)})$.
Somit folgt

$$\sigma_P(z = d) = P_z(d) = -\frac{Q}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right), \qquad \sigma_P(z = 0) = -P_z(0) = \frac{Q}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_0}\right).$$

Die Polarisationsraumladungsdichte ist $\rho_P(z) = -\text{div}\vec{P} = -\partial_z P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2 d} \frac{\Delta\epsilon}{\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon \frac{z}{d}\right)^2}$ im Dielektrikum.

2. **Hohlraum in Dielektrikum**
Ein allseitig unendlich ausgedehntes Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ sei homogen polarisiert mit Polarisation $\vec{P}_0$.

   (a) Welche Feldstärke $\vec{E}_0$ herrscht dann im Dielektrikum?

   (b) In dem polarisierten Dielektrikum werde ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius a erzeugt. Schreibe für das Potential ϕ und die Feldstärke $\vec{E}$ die im Innen- und Außenraum der Kugel geltenden Feldgleichungen an. Welche Stetigkeits- bzw. Randbedingungen müssen ϕ und $\vec{E}$ auf der Kugeloberfläche und im Unendlichen erfüllen?

   (c) Zeige durch Lösen der Feldgleichungen, dass für die elektrische Feldstärke im Hohlraum

$$\vec{E} = \frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)}\vec{P}_0$$

   gilt. Ist der Betrag dieser Feldstärke kleiner oder größer als jener von $\vec{E}_0$, d.h. hat die Feldstärke durch Erzeugen des Hohlraumes in diesem Raumbereich ab- oder zugenommen?

(Anleitung: Wähle den Kugelmittelpunkt als Koordinatenursprung und die Richtung von $\vec{P}_0$ als z-Richtung.)

Lösung:

(a) Es gilt $\vec{D}_0 = \epsilon\vec{E}_0 = \vec{E}_0 + 4\pi\vec{P}_0$
und somit $\vec{E}_0 = \frac{4\pi}{\epsilon-1}\vec{P}_0$.

(b) Die Feldgleichungen für $\vec{E}(\vec{r})$ lauten:
$\text{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0$, $\text{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$, für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:
$E_r^i(r=a,\theta) = \epsilon E_r^a(r=a,\theta)$,
$E_\theta^i(r=a,\theta) = E_\theta^a(r=a,\theta)$.
(das entspricht $\text{Div}\vec{D} = 0$, $\text{Rot}\vec{E} = \vec{0}$).
Im Unendlichen gilt $E_r^a(r\to\infty,\theta) \to E_0\cos\theta$.

Die Feldgleichungen für $\phi(\vec{r})$ lauten:
$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:
$\left.\frac{\partial\phi_i(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon \left.\frac{\partial\phi_a(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$.
$\phi_i(r=a,\theta) = \phi_a(r=a,\theta)$.
$-\left.\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r\to\infty} \to E_0\cos\theta$.

(c) $r \neq a$: $\Delta\phi(r,\theta) = 0$.
Im Außenraum gilt: $r > a$: $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_l}{r^{l+1}} + b_l r^l\right)P_l(\cos\theta)$.
Aus $-\left.\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r\to\infty} \to E_0\cos\theta$ folgt
$-\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r} = +\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)a_l}{r^{l+2}}P_l(\cos\theta) - \sum_{l=1}^{\infty} l b_l r^{l-1}P_l(\cos\theta) \to \frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 \underbrace{\cos\theta}_{=P_1(\cos\theta)}$
$\to b_1 = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0$, $b_l = 0$ für $l \geq 2$. Die Konstante b_0 kann man beliebig setzen, z.B. $b_0 = 0$.
$\to \phi(r,\theta) = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

Im Innenraum gilt: $r < a$: $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta)$.
Die Stetigkeitsbedingungen bei $r = a$ ergeben:
Aus $\phi_i(r=a,\theta) = \phi_a(r=a,\theta)$ folgt:
$c_0 = \frac{a_0}{a}$, $c_1 a = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 a + \frac{a_1}{a^2}$,$c_l = \frac{a_l}{a^{2l+1}}$ für $l \geq 2$.
Aus $\left.\frac{\partial\phi_i(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon \left.\frac{\partial\phi_a(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$ folgt:

$\sum_{l=1}^{\infty} l c_l a^{l-1} P_l(\cos\theta) = \epsilon \left[-\frac{4\pi}{\epsilon-1} P_0 \cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)a_l}{a^{l+2}} P_l(\cos\theta) \right]$
Koeffizientenvergleich liefert $a_0 = 0$, $c_0 = 0$.
$a_1 = -\frac{4\pi}{2\epsilon+1} a^3 P_0$.
$c_1 = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)} P_0$.
$c_l = a_l = 0$ für $l \geq 2$.
Somit gilt im Innenraum $r < a$:
$\phi(r,\theta) = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)} P_0 \underbrace{r\cos\theta}_{z}$
$\vec{E}(r,\theta) = \frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)} \vec{P}_0$.
$\left|\vec{E}\right| = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} \left|\vec{E}_0\right| > \left|\vec{E}_0\right|$, da $\epsilon > 1$.

3. **Kugelförmiger Elektret**
Ein elektrisch *permanent* polarisierter kugelförmiger Isolator (Elektret[1]) mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung besitzt die Polarisation

$$\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \frac{r}{a} \vec{e}_r, \qquad P_0 > 0$$

(r, ϑ, φ Kugelkoordinaten).

(a) Berechne die Polarisations-Volumsladungsdichte ρ_P im Inneren der Kugel und die Polarisations-Flächenladungsdichte σ_P auf der Kugeloberfläche sowie die Gesamtladung der Kugel.

(b) Berechne im gesamten Raum das von der polarisierten Kugel verursachte $\vec{E}$-Feld. Gib ferner für den gesamten Raum das zugehörige $\vec{D}$-Feld an und kommentiere das Ergebnis für $\vec{D}$.

Lösung:

(a) Im Inneren der Kugel $r < a$ hat man $\rho_P(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 P_r(r)\right) = -\frac{3P_0}{a} =: \rho_0$.
Am Rand der Kugel $r = a$ gilt: $\sigma_p = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{P}_\mathrm{a}}_{0} - \vec{P}_\mathrm{i}) = +P_r(r \to a) = P_0 =: \sigma_0$.
Die Gesamtladung ergibt sich als $q_P = \frac{4\pi a^3}{3}\rho_0 + 4\pi a^2 \sigma_0 = \frac{4\pi a^3}{3}\left(-\frac{3P_0}{a}\right) + 4\pi a^2 P_0 = 0$.

(b) <u>Lösungsweg 1</u>: über das $\vec{E}$ Feld
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi(\underbrace{\rho(\vec{r})}_{0} + \rho_P(\vec{r})), \qquad \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$.
Aus der Radialsymmetrie folgt $E_\theta = 0$, $E_\varphi = 0$. Im Inneren gilt: $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho_P(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) = 4\pi\rho_0 \Rightarrow r^2 E_r = 4\pi\rho_0 \int_0^r r'^2 \mathrm{d}r' = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \Rightarrow E_r = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r = -4\pi P_0 \frac{r}{a}$ für $r < a$.
Außen gilt: $\vec{E} = 0$.
Daraus folgt $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r + 4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r = 0$ innen und außen.
<u>Lösungsweg 2</u>: über das $\vec{D}$ Feld
$r < a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$
$r > a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ (auch keine Quellen und Wirbel von $\vec{D}$ im Unendlichen)
$r = 0$: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma = 0, \qquad \mathrm{Rot}\vec{D} = \underbrace{\mathrm{Rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{Rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r & r < a \\ \vec{0} & r > a. \end{cases}$$

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 2c, 3ab

[1] Siehe z.B. Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Elektret