Übungsblatt 8

für das Tutorium am 25.5.2018

1. **Kreisförmige Plattenkondensatoren**

   (a) Berechne die Kapazität der Anordnung aus Beispiel 7.1.

   Lösung:

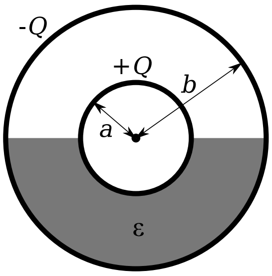
   (a) Die Kapazität ist gegeben durch $C = Q/U$ mit $U = \phi(z = d) - \phi(z = 0)$. Mit $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi = -\partial_z\phi(z)\vec{e}_z$ folgt daraus

   $$\phi(d) - \phi(0) = -\int_0^d E_z(z)\mathrm{d}z = \int_0^d \frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\mathrm{d}z$$

   Integrieren und einsetzen ergibt

   $$C = \frac{R_0^2}{4d}\frac{\Delta\epsilon}{\ln\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right)}.$$

2. **Zylinderkondensator**



Zwei konzentrische ideal-leitende Zylinderflächen mit innerem und äußerem Radius a bzw. b und Länge $L \gg a, b$ tragen die Ladungen $+Q$ bzw. $-Q$. Der Raum zwischen den Zylinderflächen sei unterhalb der Äquatorebene mit einem Dielektrikum (Dielektrizitätskonstante ϵ) gefüllt, während die obere Hälfte freier Raum sei.

   (a) Berechne das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und die elektrische Flussdichte $\vec{D}(\vec{r})$ im Raum zwischen den Zylinderflächen. Hierfür kann als Ansatz für den gesamten Zwischenraum $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$ verwendet werden. Zeige, dass mit diesem Ansatz alle Rand- und Anschlussbedingungen auf den Zylinderflächen erfüllt werden.

   (b) Berechne die Verteilung der Flächenladung auf den leitenden Zylinderflächen.

   (c) Berechne die Kapazität dieser Anordnung.

   Lösung:

   (a) In der Integralform gilt: $\oint_{\partial V} d^2\vec{f}\cdot\vec{D} = \int_V d^3r\, 4\pi\rho$.
   $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.
   $$2\pi rL\left(\frac{1}{2}\underbrace{D^{\mathrm{oben}}(r)}_{=E(r)} + \frac{1}{2}\underbrace{D^{\mathrm{unten}}(r)}_{=\epsilon E(r)}\right) = 4\pi Q.$$
   Somit ergibt sich $E(r) = \frac{4}{1+\epsilon}\frac{Q}{rL}$.

$D(r) = \begin{cases} \frac{4}{1+\epsilon}\frac{Q}{rL} & \text{oben,} \\ \frac{4\epsilon}{1+\epsilon}\frac{Q}{rL} & \text{unten.} \end{cases}$

Die Rand- und Anschlussbedingungen lauten

$\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi\sigma.$

$\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0.$

An den Zylinderoberflächen gilt, dass die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig ist, dass $\vec{E}$ außen verschwindet und innen radial verläuft.

An der Grenzfläche gilt, dass die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig ist, und oben und unten E_{radial} gleich ist.

(b) Die Flächenladung wird berechnet aus:

$\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi\sigma$. Innen und außen verschwindet das Feld.

Innen: $\sigma = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{4}{1+\epsilon}\frac{Q}{aL} & \text{oben,} \\ \frac{1}{4\pi}\frac{4\epsilon}{1+\epsilon}\frac{Q}{aL} & \text{unten.} \end{cases}$

Außen: $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{4}{1+\epsilon}\frac{Q}{bL}\begin{cases} 1 & \text{oben,} \\ \epsilon & \text{unten.} \end{cases}$

(c) Die Kapazität wird berechnet durch:

$C = \frac{Q}{U}$.

$U = \phi(a) - \phi(b)$.

$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r) = -\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)$.

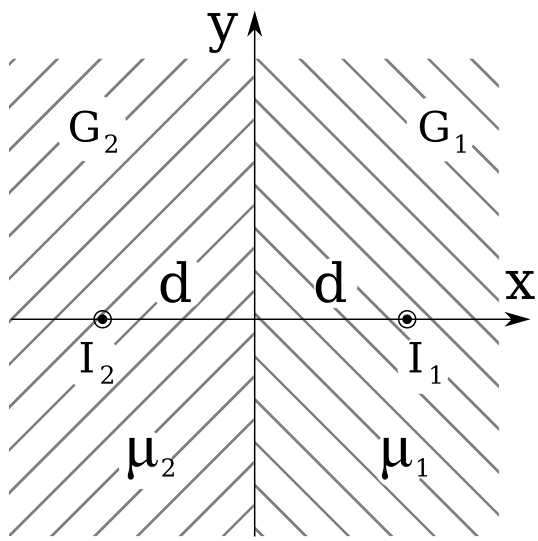
$\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = -E(r) = -\frac{4}{1+\epsilon}\frac{Q}{rL}$.

$U = \phi(a) - \phi(b) = -\int_b^a E(r)dr$.

Integrieren und einsetzen ergibt $C = \frac{1+\epsilon}{4}\frac{L}{\ln\frac{b}{a}}$.

3. **Halbräume mit unterschiedlichen Permeabilitäten**

Zwei Dia- oder Paramagnetika mit den Permeabilitäten μ_1, μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) grenzen mit einer ebenen Trennfläche aneinander. Im Medium 1 befindet sich im Abstand d von der Grenzfläche ein zu dieser paralleler unendlich dünner gerader Leiter, welcher von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird, im Medium 2 befindet sich spiegelbildlich dazu ein unendlich dünner gerader Leiter, welcher in der gleichen Richtung von einem zeitlich konstanten Strom I_2 durchflossen wird (siehe Abbildung).



(a) Schreibe für die magnetische Feldstärke $\vec{B}$ die Feldgleichungen in den Raumgebieten $G_1 : x > 0$ und $G_2 : x < 0$, die Anschlussbedingungen für $x = 0$ sowie die asymptotische Bedingung an.

(b) Löse die Aufgabenstellung von (a) mit Hilfe von Bildstromansätzen.

Lösung:

(a) Aus Symmetriegründen gilt $B_x(x, y)$, $B_y(x, y)$, $B_z = 0$.

Die Feldgleichungen für $\vec{B}$ lassen sich für Materie mit Materialgleichung $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r})$ allgemein schreiben als

$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0$ und $\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$, also $\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r})$.

Somit gilt

$G_1 : x > 0$: $\mathrm{div}\vec{B}(x, y) = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{B}(x, y) = \frac{4\pi}{c}\mu_1 I_1 \delta(x - d)\delta(y)\vec{e}_z$.

$G_2 : x < 0$: $\mathrm{div}\vec{B}(x, y) = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{B}(x, y) = \frac{4\pi}{c}\mu_2 I_2 \delta(x + d)\delta(y)\vec{e}_z$.

Die asymptotische Bedingung für $\vec{B}$ lautet $\vec{B}(x, y) \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{0}$ für $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Die Anschlussbedingungen für $\vec{B}$ für $x = 0$ folgen aus $\mathrm{Div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ in der Form

$B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y), \qquad \frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$.

(b) Im Raum G_1 für $x > 0$ nimmt man ein Ersatzproblem an:

Der gesamte Raum habe Permeabilität μ_1 (statt μ_2 für $x < 0$), und es fließe der Strom I_1' (statt I_2) durch den Leiter bei $x = -d$, $y = 0$.

Im Raum G_2 für $x < 0$ nimmt man das Ersatzproblem, wo der gesamte Raum Permeabilität μ_2 habe, und der Strom I_2' statt I_1 fließe.

Der Ansatz für das Magnetfeld lautet

In $G_1 : \vec{B}(x, y) = \frac{2\mu_1 I_1}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right)$.

Dieser Ansatz erfüllt die Feldgleichungen für $x > 0$ und die asymptotische Bedingung.

In G_2: $\vec{B}(x, y) = \frac{2\mu_2 I_2}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right)$.

Falls das Einsetzen in die Anschlussbedingungen keinen Widerspruch ergibt, und I_1' und I_2' eindeutig zu berechnen sind, ist die Lösung gefunden.

1. Anschlussbedingung: $B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y)$

$\mu_1 I_1 + \mu_1 I_1' = \mu_2 I_2 + \mu_2 I_2'$.

2. Anschlussbedingung: $\frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$

$-I_1 + I_1' = I_2 - I_2'$.

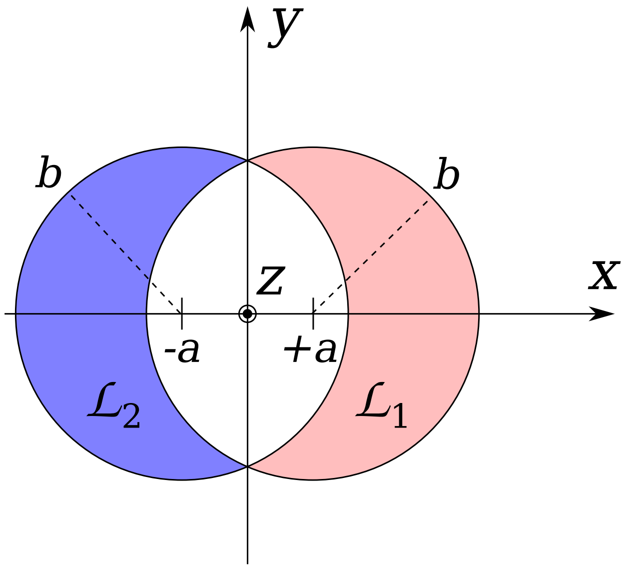
Auflösen ergibt

$I_1' = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_1 + \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_2$.

$I_2' = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I_1 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_2$.

4. **Feld zwischen unendlich langen Leitern mit sichelförmigem Querschnitt**

Zwei unendlich lange Leiter $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ besitzen sichelförmige Querschnitte und räumliche Lage wie in der Abbildung dargestellt. Der Leiter $\mathcal{L}_1$ wird in positive z-Richtung, der Leiter $\mathcal{L}_2$ in negative z-Richtung von einem über den Querschnitt gleichmäßig verteilten elektrischen Strom der Dichte j_0 durchflossen. Berechne die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ in dem zwischen den Leitern eingeschlossenen Raumbereich.



Lösung:

Für die Berechnung von $\vec{B}$ wird am einfachsten die Integralform des Oerstedschen Gesetzes angewendet. Im Inneren eines Zylinders gilt: $\oint_{\partial F} \vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}(\vec{r})\mathrm{d}^2\vec{f}$. Aus Symmetriegründen gilt daher $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$. $2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} j_0 r^2 \pi$. Somit folgt $\vec{B} = \frac{2\pi}{c} j_0(-y, x, 0)$.

Superposition von zwei Zylindern mit Strömen in entgegengesetzter Richtung ergibt $\vec{B}(x, y) = -\frac{4\pi}{c} a j_0 \vec{e}_y$.

Ankreuzbar: 1a, 2ab, 2c, 3ab, 4