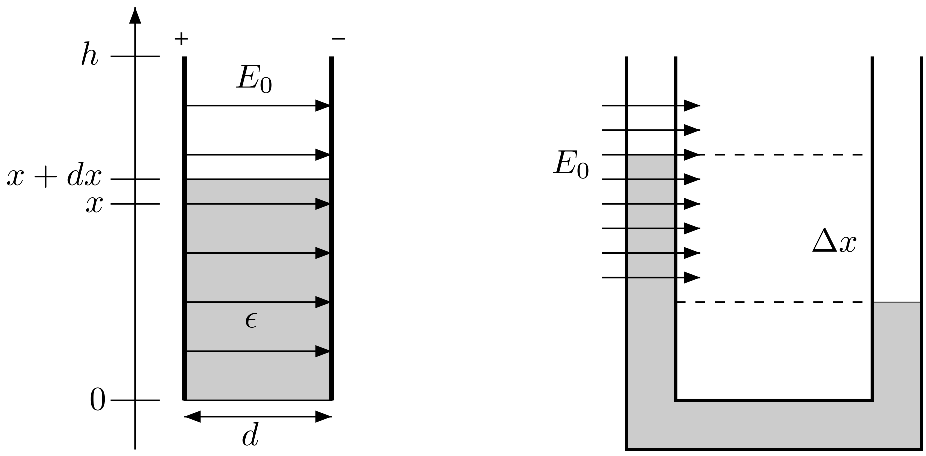
Übungsblatt 9

für das Tutorium am 1.6.2018

1. **Steighöhenmethode**
Auf einen begrenzten dielektrischen Körper wirkt im elektrischen Feld eine "ponderomotische" Kraft. Um diese zu berechnen soll ein Plattenkondensator (Plattenabstand d, Höhe h, Breite der Platten b) betrachtet werden, dessen Zwischenraum bis zur Position x ein Dielektrikum der Permittivität ϵ ausfüllt, während der restliche Raum leer ist.



(a) Berechne die Kapazität $C(x)$ des Kondensators.

(b) Der Kondensator sei an eine Batterie angeschlossen, sodass die Platten auf konstanter Potentialdifferenz V gehalten werden. Berechne die Kraft, mit der das Dielektrikum in den Kondensator hineingezogen wird, und drücke das Resultat durch das elektrische Feld E_0 zwischen den Kondensatorplatten aus. Um das Resultat zu erhalten, betrachte die Energiebilanz, wenn das Dielektrikum um dx verschoben wird.

(c) Die Permittivität ϵ einer Flüssigkeit mit Massendichte ρ_m lässt sich messen, indem man sie in ein U-förmiges Rohr füllt und einen Schenkel in ein homogenes elektrisches Feld E_0 einbringt. Wie lautet der Zusammenhang zwischen ϵ und der durch das Feld hervorgerufenen Steighöhe Δx der Flüssigkeit?

Lösung:

(a) Die Gesamtkapazität ist eine lineare Funktion der Eindringtiefe des Dielektrikums

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{b}{d}\left[x(\epsilon - 1) + h\right]. \tag{1}$$

(b) Die gesuchte ponderomotische Kraft lautet

$$F = \frac{1}{8\pi} bd(\epsilon - 1)E_0^2, \tag{2}$$

wobei im letzten Schritt $E_0 = V/d$ verwendet wurde.

(c) Bestimmung von ϵ aus der Steighöhe Δx:

$$\epsilon = 1 + \frac{8\pi\rho_m g}{E_0^2}\Delta x \tag{3}$$

Wie zu erwarten war ist das Resultat nicht von der Geometrie des Kondensators abhängig.

2. **Stromdurchflossener Leiter**

   (a) Berechne mit dem Biot-Savartschen Gesetz das Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Stromschleife an $z = 0$ mit Eckpunkten $(x, y) = \{(a, a), (-a, a), (-a, -a), (a, -a)\}$, welche im Gegenuhrzeigersinn von einem konstanten Strom I durchflossen wird.

   (b) Betrachte nun ein regelmässiges Polygon mit n Seiten, bei dem der Normalabstand von jeder Seite zum Mittelpunkt a ist und durch das im Gegenuhrzeigersinn ein Strom I fliesst. Konstruiere das Polygon so, dass der Mittelpunkt an $(x, y, z) = (0, a, 0)$ liegt und eine Seite entlang der x-Achse. Berechne das Magnetfeld im Mittelpunkt des Polygons.

   (c) Berechne das Feld aus Punkt (b) im Grenzwert $n \to \infty$. Welcher Geometrie entspricht das?

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} \tag{4}$$

Lösung:

   (a) Das Magnetfeld setzt sich aus den Beiträgen der vier Seiten zusammen. Wir berechnen den Beitrag der ersten Seite:

$$\begin{aligned}\vec{B}_1(0,0,0) &= \frac{1}{c}\int_{-a}^{a} \frac{I dx' \vec{e}_x \times (-x'\vec{e}_x + a\vec{e}_y)}{(x'^2+a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I\sqrt{2}}{c\,a}\vec{e}_z\end{aligned} \tag{5}$$

   Alle anderen Komponenten liefern denselben Beitrag. Damit ist das Resultat:

$$\vec{B}(0,0,0) = \frac{4I\sqrt{2}}{c\,a}\vec{e}_z \tag{6}$$

   (b) Der Öffungswinkel zu einer Seite ist $\frac{2\pi}{n}$. Wir betrachten nun die Seite, die auf der x-Achse liegt. Um das Magnetfeld der einen Seite zu erhalten müssen wir zwischen diesen Punkten entlang der x-Achse integrieren. Der Beitrag der Seite auf der x-Achse zum Magnetfeld im Mittelpunkt des Polygons ist daher:

$$\begin{aligned}\vec{B}_x(0,a,0) &= \frac{1}{c}\int_{-a\tan\frac{\pi}{n}}^{a\tan\frac{\pi}{n}} \frac{I dx' \vec{e}_x \times (-x'\vec{e}_x + a\vec{e}_y)}{(x'^2+a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2I}{c\,a}\sin\frac{\pi}{n}\vec{e}_z.\end{aligned} \tag{7}$$

   Aufgrund der Rotationssymmetrie im Zentrum tragen alle anderen Seiten den gleichen Wert bei. Daher erhalten wir

$$\vec{B}(0,a,0) = \frac{2I}{c\,a} n \sin\frac{\pi}{n}\vec{e}_z. \tag{8}$$

   (c) Der Limes $n \to \infty$ entspricht einem kreisförmigen stromdurchflossenen Leiter mit Radius a. In diesem Limes lässt sich $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^3})$ nähern, und man erhält

$$\lim_{n\to\infty} \vec{B}(0,a,0) = \frac{2\pi I}{c\,a}\vec{e}_z. \tag{9}$$

3. **Permanent magnetisierter Zylinder**
   Ein unendlich langer permanent magnetisierter Zylinder mit dem Radius a und der z-Achse als Zylinderachse besitzt die Magnetisierung

$$\vec{M}(r,\varphi,z) = M_0\frac{r}{a}\vec{e}_\varphi, \qquad M_0 > 0 \tag{10}$$

   wobei (r, φ, z) Zylinderkoordinaten sind.

(a) Berechne die Magnetisierungsstromdichte $\vec{j}_M$ in Inneren des Zylinders und die Magnetisierungs-Flächenstromdichte $\vec{k}_M$ auf dem Zylindermantel sowie den in z-Richtung fließenden Gesamtstrom.

(b) Berechne im gesamten Raum das vom magnetisierten Zylinder verursachte $\vec{B}$-Feld. Gib ferner für den gesamten Raum das zugehörige $\vec{H}$-Feld an.

Hinweis: Verwende die Integralform des Oerstedschen Gesetzes.

Lösung:

(a) Im Inneren des Zylinders $r < a$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{j}_M(\vec{r}) &= c\,\mathrm{rot}\vec{M}(\vec{r}) && (11)\\ &= 2M_0 c\frac{1}{a}\vec{e}_z. && (12) \end{aligned}$$

Am Rand $r = a$ gilt

$$\vec{k}_M = c\,\mathrm{Rot}\vec{M} = -M_0 c\vec{e}_z. \tag{13}$$

Der Gesamtstrom in z-Richtung ist durch

$$I = 0. \tag{14}$$

(b) Im Innen- bzw. Außenraum erhält man:

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi M_0 \frac{r}{a} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{15}$$

Somit folgt $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{0}$ im ganzen Raum.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a, 2bc, 3ab