Übungsblatt 10

für das Tutorium am 8.6.2018

1. **Kräfte zwischen Kreis- und Linienstrom**

Gegeben sei ein unendlich langer dünner Leiter L_1, der im Abstand $x = d$ parallel zur y-Achse verläuft und von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird.

(a) Berechne das Magnetfeld und daraus ein Vektorpotential.

(b) Betrachte zusätzlich einen dünnen Leiter L_2, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der x-y-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom I_2 durchflossen. Berechne die auf den Leiter L_2 wirkende Kraft $\vec{F}$.

Hinweis: $\int_0^\pi \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.

Lösung:

(a) Die Zylinderkoordinaten werden entlang der y-Achse angewendet.

Für $\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$ erhält man

$$\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j}\mathrm{d}\vec{f}$$

und damit

$$\vec{B} = \frac{2I_1}{c} \left(\frac{z}{z^2 + (x-d)^2}, 0, \frac{d-x}{z^2 + (x-d)^2} \right).$$

Die Berechnung des Vektorpotentials erfolgt über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

$$A_y = -\frac{I_1}{c} \ln\left[z^2 + (x-d)^2\right].$$

(b) Die Kraft auf den Leiter wird berechnet durch: $\vec{F} = \frac{I_2}{c} \int_{L_2} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}(r)$, mit $\vec{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$. $\mathrm{d}\vec{r} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)a\mathrm{d}\varphi$, und $\vec{B}_1(z=0) = (0, 0, 2I_1/(c(d-x)))$. Damit ergibt sich

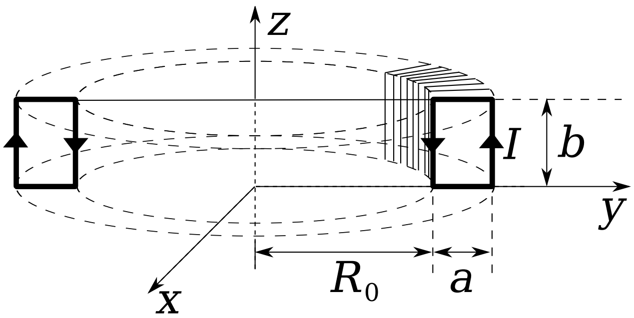
$$F_x = \frac{4\pi}{c^2} I_1 I_2 \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{\sqrt{d^2 - a^2}},$$

$$F_y = 0.$$

2. **Toroidale Spule mit rechteckigem Querschnitt**

(a) Eine sehr fein und gleichmäßig gewickelte Spule mit N Windungen sei um einen in sich ringförmig geschlossenen Spulenkörper gewickelt. Dieser Spulenkörper ergebe sich durch Rotation eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b um die z-Achse mit Innenabstand R_0 (siehe Skizze). Durch die Spule werde ein Strom I geschickt. Welches Magnetfeld ergibt sich im Inneren und Äußeren dieser Spule?

(b) Berechne außerdem den magnetischen Fluss durch die Spule und ihre Selbstinduktion. Hat für $b > a$ die gegebene Spule die größere Selbstinduktion, oder die Spule mit a und b vertauscht (sonstige Parameter gleich)?



Hinweis: Überzeuge dich zunächst, dass das Magnetfeld von der Form $\vec{B}(x,y,z) = B(r,z)\vec{e}_\varphi$ ist (mit r, φ, z Zylinderkoordinaten), und wende dann die Integralform des Oerstedschen Gesetzes über eine geeignete Fläche an, um das Magnetfeld im Innen- und Außenraum zu berechnen.

Lösung:

(a) Das Magnetfeld hat nur eine $\vec{e}_\varphi$-Komponente aufgrund der Spiegelsymmetrie, wie man folgendermaßen sieht: Z.B. für $\varphi = 0$ in der $y = 0$ Ebene addieren sich an einem Ort $\vec{r} = (x, 0, z)$ die Beiträge vom Ort $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ mit Strom in Richtung $\vec{j}(\vec{r}\,') = (j_x, j_y, j_z)$ und vom an $y = 0$ gespiegelten Ort $\vec{r}\,'' = (x', -y', z')$ mit $\vec{j}(j_x, -j_y, j_z)$ folgendermaßen auf $\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,') + \vec{j}(\vec{r}\,'') \times (\vec{r} - \vec{r}\,'') = 2\left(j_z(x - x') - j_x(z - z')\right)\vec{e}_y$, sodass die $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ Komponenten verschwinden. Die Spiegelsymmetrie ist (annähernd) für eine sehr fein gewickelte Spule erfüllt.

Für das Oerstedsche Gesetz nimmt man eine Kreisfläche mit Radius r. Innerhalb der Spule: Gesamtstrom NI. Außerhalb der Spule: Gesamtstrom 0. Außen: $B_\varphi = 0$. Innen:

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{j}.$$

Somit folgt:

$$B_\varphi = -\frac{2}{c}\frac{IN}{r}$$

(b) Der Fluss für eine Windung ist gegeben durch:

$$\Phi_1 = \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{B} = \frac{2INb}{c} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Die Selbstinduktion für den Gesamtfluss $\Phi_N = N\Phi_1$ beträgt:

$$L = \frac{1}{c}\Phi_N \frac{1}{I} = \frac{2N^2 b}{c^2} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Eine Abschätzung $b \ln \frac{R_0+a}{R_0} > a \ln \frac{R_0+b}{R_0}$ kann über eine Substitution $b = R_0(\exp(\tilde{b}) - 1) > 0$ mit anschließender Taylor-Entwicklung erfolgen. Daraus folgt, dass die ursprüngliche Orientierung die größere Selbstinduktion hat.

3. **Metallischer Spiegel**

Der Halbraum $z < 0$ sei ladungsfreies Vakuum, der Halbraum $z \geq 0$ sei von einer ideal leitenden Substanz erfüllt. Aus dem Vakuum falle eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle auf die Grenzfläche $z = 0$ ein, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E}^+(z,t) = E_0^+ \cos(kz - \omega t)\vec{e}_x, \qquad E_0^+ \in \mathbb{R},\ k = \frac{\omega}{c}$$

gegeben ist.

(a) Berechne das elektromagnetische Gesamt-Wellenfeld, das sich im Halbraum $z < 0$ ausbildet. Zeige über Additionstheoreme, dass sich eine stehende Welle bildet. (Hinweis: Im Inneren eines sogenannten „idealen Leiters“ ist das elektro-magnetische Feld stets null.)

(b) Berechne die Flächenladungsdichte und die Flächenstromdichte auf der Oberfläche $z = 0$ des idealen Leiters.

(c) Berechne die Energiedichte und die Energiestromdichte im Halbraum $z < 0$ sowie deren zeitliche Mittelwerte über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ des Wellenfeldes.

Lösung:

(a) Der Ansatz ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z,t) &= \left[E_0^+ \cos(kz - \omega t) + E_0^- \cos(-kz - \omega t)\right] \vec{e}_x, \\
\vec{B}(z,t) &= \vec{e}_z \times \vec{E}^+(z,t) + (-\vec{e}_z) \times \vec{E}^-(z,t) = \left[E_0^+ \cos(kz - \omega t) - E_0^- \cos(-kz - \omega t)\right] \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

Der Ansatz erfüllt die Feldgleichungen für $x < 0$. Die Randbedingungen $\mathrm{Div}\vec{B} = 0$ und $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ sind erfüllt bzw. ergeben $E_0^+ = -E_0^-$. Durch Umformen der trigonometrischen Funktionen erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z,t) &= 2E_0^+ \sin kz \sin \omega t \vec{e}_x, \\
\vec{B}(z,t) &= 2E_0^+ \cos kz \cos \omega t \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

(b) Die Flächenladungsdichte wird berechnet über $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$. Damit erhält man $\sigma = 0$.

Die Flächenstromdichte folgt aus $\mathrm{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k}$. Damit erhält man $\vec{k} = \frac{c}{2\pi} E_0^+ \cos \omega t \vec{e}_x$. (Wechselstrom in x-Richtung)

(c) Die Energiedichte wird berechnet durch $w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$

Das Zeitmittel über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ist gegeben durch $\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2$.

Die Energiestromdichte (Poyntingvektor) wird berechnet durch $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$.

Das Zeitmittel ergibt: $\left\langle \vec{S} \right\rangle = 0$.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 3ab, 3c