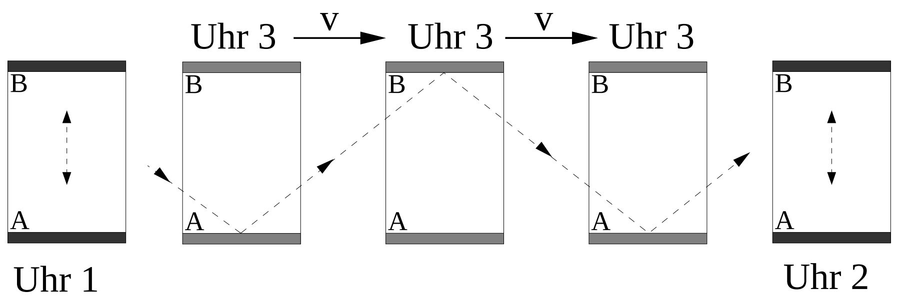
Übungsblatt 11

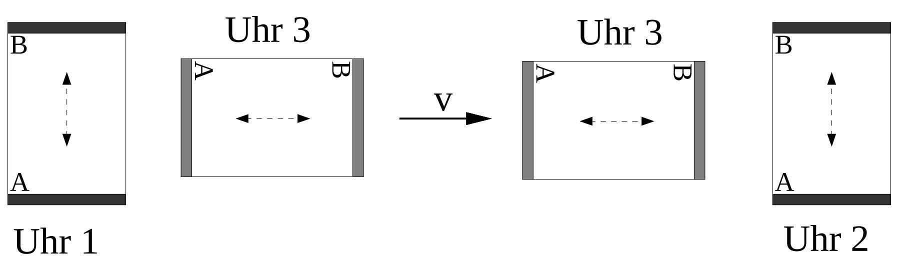
für das Tutorium am 15.6.2018

1. **Zeitdilatation und Längenkontraktion**

(a) Zwischen zwei parallelen Spiegeln A und B mit Abstand L bewege sich ein Lichtblitz hin und her. Diese „Uhr“ ticke bei jedem Auftreffen des Lichtblitzes auf den Spiegel A, was durch einen Zähler registriert werde. Es seien nun zwei solcher Uhren synchronisiert und in einem festen Abstand voneinander aufgestellt. Eine dritte bewege sich dazu mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v wie im Bild dargestellt. Berechne mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Faktor, um den die bewegte Uhr langsamer geht als die beiden ruhenden.



(b) Es sei der Versuchsaufbau wie in Teil (a) gegeben mit dem Unterschied, dass nun die sich bewegende dritte Uhr um 90° so gedreht ist, dass die Bewegungsrichtung der Uhr parallel zum Laufweg des Lichtblitzes in ihrem Innern ist.
Um welchen Faktor muss der Abstand der beiden Spiegel der bewegten dritten Uhr *verringert* werden, damit sie um den in Teil (a) berechneten Faktor langsamer geht?

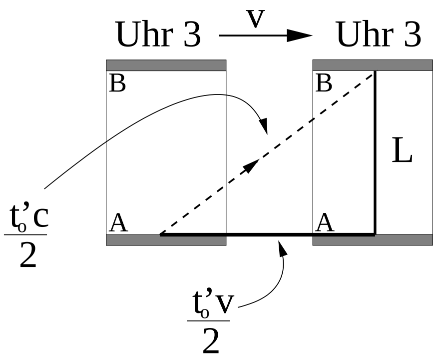


Anmerkung: Auch hier reichen zur Berechnung einfache geometrische Überlegungen zu den Laufstrecken des Lichtblitzes in der bewegten dritten Uhr aus.

Lösung:

(a) Zwischen zwei Ticks der beiden ruhenden Uhren 1 und 2 vergeht die Zeit $t_0 = \frac{2L}{c}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Sei t_0' der zeitliche Abstand im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2, den der Lichtblitz in der bewegten Uhr 3 benötigt, um von Spiegel A nach Spiegel B und wieder zurück zu Spiegel A zu laufen. Während der Laufzeit von Spiegel A nach Spiegel B in Uhr 3, $t_0'/2$, hat sich Spiegel B bereits um die Strecke $t_0'v/2$ weiterbewegt. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich

$$L^2 + \left(\frac{t_0'v}{2}\right)^2 = \left(\frac{t_0'c}{2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad t_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t_0 \,.$$



Im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 geht Uhr 3 also um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$ langsamer ($v < c\,!$) als die beiden ruhenden Uhren. Genauer gesagt, wenn Uhr 3 im Moment, indem sie sich am Ort von Uhr 1 befindet, den gleichen Zählerstand hat wie Uhr 2, so ist ihr Zählerstand im Moment, in dem sie sich am Ort von Uhr 2 befindet um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ geringer als der von Uhr 2.

(b) Es sei L' der Spiegelabstand von Uhr 3 im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2. Angenommen, der Lichtstrahl braucht im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 die Zeit t_1', um in Uhr 3 von Spiegel A nach Spiegel B zu laufen. Weil B in dieser Zeit die Strecke vt_1' zurückgelegt hat, gilt

$$L' + vt_1' = ct_1'.$$

Für die Laufzeit t_2', die das Licht von B nach A benötigt, ergibt sich analog

$$t_2' = \frac{L'}{c+v}.$$

Die Periodendauer t_0' der bewegten Uhr 3 ist damit im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2

$$t_0' = t_1' + t_2' = \frac{2L'}{c(1-\frac{v^2}{c^2})}.$$

Die Forderung aus der Aufgabenstellung, dass Uhr 3 um den selben Faktor langsamer geht wie in Teil (a) (die Zeitdilatation hängt alleine von der Relativbewegung beider Bezugssystemen ab), ist also

$$t_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t_0 \quad \leftrightarrow L' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L.$$

Der Abstand zwischen den beiden Spiegeln der Uhr 3 erscheint im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 also verkleinert.

2. **Vorbeiflug zweier Stäbe**

Betrachtet werden zwei Stäbe der gleichen Ruhelänge L_0 (Distanz zwischen linkem Stabende A und rechtem Stabende B im jeweiligen Ruhesystem). Beide Stäbe liegen parallel zur x-Achse. Im Inertialsystem S ruht der erste Stab, während sich der zweite gleichförmig geradlinig nach rechts bewegt. Das Inertialsystem des zweiten Stabes sei S'.

Beobachter in S stellen fest, dass zwischen den beiden Eregnissen „Das linke Stabende A_2 von Stab 2 fliegt am linken Stabende A_1 von Stab 1 vorbei“ und „Das rechte Stabende B_2 von Stab 2 fliegt am rechten Stabende B_1 von Stab 1 vorbei“ das Zeitintervall Δt verstreicht.

(a) Berechne die Geschwindigkeit v des Stabes 2 relativ zum Stab 1. Wie groß kann Δt bei gegebenem L_0 maximal sein?

(b) In welcher zeitlichen Reihenfolge finden die vier Ereignisse

E_1 : A_2 fliegt an A_1 vorbei

E_2 : A_2 fliegt an B_1 vorbei
E_3 : B_2 fliegt an A_1 vorbei
E_4 : B_2 fliegt an B_1 vorbei
für Beobachter in S bzw. für Beobachter in S' statt? Zeichne ein Minkowski-Diagramm aus der Sicht des Systems S, sowie eines aus der Sicht von S'.

(c) Gibt es ein Inertialsystem S'', in welchem die beiden Ereignisse E_1 und E_4 gleichzeitig sind? Gibt es ein Inertialsystem S''', in welchem das Ereignis E_2 zeitlich vor dem Ereignis E_3 stattfindet? (Wenn ja, berechne die Geschwindigkeiten von S'' bzw. S''' gegenüber S, und zeichne die Minkowski-Diagramme aus der Sicht von S'' bzw. S''' . Wenn nein, begründe die Antwort.)

Lösung:

(a) Stab 2 ist in S_1 lorentzkontrahiert auf die Länge $L = L_0/\gamma(v)$. Die zurückzulegende Strecke (=Differenz zum ruhenden Stab) beträgt $v\Delta t = L_0 - L = L_0\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$. Somit ergibt sich $v = \frac{2L_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + \frac{L_0^2}{c^2}}$.

Bei gegebenem L_0 wird $(\Delta t)_{max}$ für $v \to c$, $\gamma \to \infty$ erreicht: $(\Delta t)_{max} = \frac{L_0}{c}$.

(b) Zum selber Zeichnen. Einheitshyperbel nicht vergessen, um L_0 einzutragen.
In S: E_3, E_1, E_4, E_2.
In S': E_3, E_4, E_1, E_2.

(c) Es gibt S'', da E_1 und E_4 raumartig liegen. In S'' sind die Stäbe gleich lang.
Die Geschwindigkeit u von S'' gegenüber S ist gleich der Geschwindigkeit u von S' gegenüber S''. Nach dem Geschwindigkeitsadditionstheorem folgt
$v = \frac{u+u}{1+\frac{uu}{c^2}}$. Das hat die beiden Lösungen
$u_1 = \frac{L_0}{\Delta t}$ und $u_2 = \frac{c^2\Delta t}{L_0}$.
u_1 liefert für kleine Δt das falsche Verhalten. Daher ist u_2 die Lösung.
Es existiert kein S''', da E_2 in der universellen Zukunft von E_3 liegt.

3. **Lorentztransformationen**

Gegeben seien eine Lorentztransformation in x-Richtung $\mathbf{\Lambda}(\beta)$ (siehe Vorlesung), eine in y-Richtung $\mathbf{\Lambda}'(\beta)$, und eine Drehung $\boldsymbol{R}(\alpha)$ um die z-Achse:

$$\mathbf{\Lambda}'(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass im Allgemeinen $\mathbf{\Lambda}(\beta)\mathbf{\Lambda}'(\beta) \neq \mathbf{\Lambda}'(\beta)\mathbf{\Lambda}(\beta)$. Können die resultierenden Transformationen für $\beta \neq 0$ reine Geschwindigkeitstransformationen sein?

(b) Das Produkt der zwei Lorentz-Transformationen lässt sich in folgender Weise schreiben: $\mathbf{\Lambda}(\beta)\mathbf{\Lambda}'(\beta) = \boldsymbol{R}(\delta)\mathbf{\Lambda}(\beta')\boldsymbol{R}(\alpha)$. Bestimme β', α und δ als Funktion von β anhand geeigneter Komponenten.

Lösung:

(a) $$\mathbf{\Lambda}(\beta)\mathbf{\Lambda}'(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma^2 & -\beta\gamma & -\beta\gamma^2 & 0 \\ -\beta\gamma^2 & \gamma & \beta^2\gamma^2 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{\Lambda}'(\beta)\mathbf{\Lambda}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma^2 & -\beta\gamma^2 & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma^2 & \beta^2\gamma^2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Da die resultierenden Matrizen nicht symmetrisch sind, können sie keine reine Geschwindigkeitstransformationen sein, denn für diese gilt: $\left(\boldsymbol{R}\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{R}^{-1}\right)^T = \left(\boldsymbol{R}\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{R}^T\right)^T = \boldsymbol{R}^{T^T}\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{R}^{-1}$, d.h. eine reine Geschwindigkeitstransformation wäre symmetrisch - ihre Transponierte ist gleich der Matrix selbst.

b)

$$
\boldsymbol{R}(\delta)\mathbf{\Lambda}(\beta')\boldsymbol{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma'\cos\alpha & \beta'\gamma'\sin\alpha & 0 \\ -\beta'\gamma'\cos\delta & \gamma'\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta & -\gamma'\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta & 0 \\ -\beta'\gamma'\sin\delta & \gamma'\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\cos\delta & -\gamma'\sin\alpha\sin\delta + \cos\alpha\cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Vergleich ausgewählter Komponenten der Matrizen aus (a) und (b) liefert

$\beta' = \beta\sqrt{2-\beta^2}$

$\delta = \arctan\frac{1}{\gamma}$

$\alpha = -\arctan\gamma$

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2a, 2bc, 3ab