Übungsblatt 12

für das Tutorium am 22.6.2018

1. **Gedrehter Stab**
In einem Intertialsystem S befindet sich ein Stab in der xy-Ebene und bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}c$ in y-Richtung. Die Länge des Stabes in S ist L. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege ein Ende des Stabes im Ursprung des Koordinatensystems, während sich der Rest des Stabes im vierten Quadranten befindet und mit der x-Achse einen Winkel von 30° einschließt.

(a) Wie groß ist die Ruhelänge L_0 des Stabes?

(b) Gibt es ein Inertialsystem S', das sich mit Geschwindigkeit V relativ zur x-Richtung bewegt, in dem der Stab parallel zur x'-Achse ist? Wie groß ist V?

(c) Welche Länge L' besitzt der Stab in S'. Was ist seine Geschwindigkeit $\vec{v}'$?

Lösung:

(a) Für die Länge des Stabes benötigen wir die x- und y-Komponenten. Dafür brauchen wir

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Um die Ruhelänge L_0 des Stabes zu berechnen stellen wir fest, dass die y-Komponente des Stabes in S um den Faktor γ längenkontahiert wird, wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}. \tag{2}$$

Damit ist die Ruhelänge

$$L_0 = \left|\begin{pmatrix} L\cos\frac{\pi}{6} \\ -\gamma L \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = L\sqrt{\frac{6}{5}} \tag{3}$$

(b) Im System S haben der Anfang (A) und das Ende (E) des Stabes folgende Koordinaten als Funktion von t:

$$\begin{aligned} &x_A(t) = 0 && x_E(t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L \\ &y_A(t) = vt = \tfrac{2}{3}ct && y_E(t) = vt - \tfrac{L}{2} = \tfrac{2}{3}ct - \tfrac{L}{2} \\ &z_A(t) = 0 && z_E(t) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun transformieren wir auf ein System S', das sich mit Geschwindigkeit V in x-Richtung bewegt. Anfang und Ende des Stabes in S' sind

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_A(t') \\ y'_A(t') \\ z'_A(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\frac{V}{c}\gamma(V) & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma(V) & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \\ \frac{2}{3}ct \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V)ct \\ -\frac{V}{c}\gamma(V)ct \\ \frac{2}{3}ct \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x'_E(t') \\ y'_E(t') \\ z'_E(t') \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\frac{V}{c}\gamma(V) & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma(V) & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ \frac{2}{3}ct - \frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(V)ct - \frac{V}{c}\gamma(V)\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ -\frac{V}{c}\gamma(V)ct + \gamma(V)\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ \frac{2}{3}ct - \frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

Wir können nun jeweils des ersten Eintrag des Vierervektors verwenden um t durch t' auszudrücken und die Ortsvektoren $\vec{r}_A(t')$ und $\vec{r}_E(t')$ zu bestimmen. Für den Stabanfang haben wir $ct' = \gamma(V)ct$ und damit

$$
\begin{aligned}
x'_A(t') &= -Vt' && (7)\\
y'_A(t') &= \frac{2c}{3\gamma(V)}t' && (8)\\
z'_A(t') &= 0. && (9)
\end{aligned}
$$

Für das Ende haben wir $ct' = \gamma(V)ct - \frac{V}{c}\gamma(V)\frac{\sqrt{3}}{2}L$ und somit

$$
\begin{aligned}
x'_E(t') &= -\frac{V}{c}\left(ct' + \frac{V}{c}\gamma(V)\frac{\sqrt{3}}{2}L\right) = -Vt' + \frac{1}{\gamma(V)}\frac{\sqrt{3}}{2}L && (10)\\
y'_E(t') &= \frac{2}{3}\left(\frac{ct'}{\gamma(V)} + \frac{V}{c}\frac{\sqrt{3}}{2}L\right) = \frac{2c}{3\gamma(V)}t' - \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{V}{c}\right) && (11)\\
z'_E(t') &= 0. && (12)
\end{aligned}
$$

Die Bedingung, dass der Stab parallel zur x'-Achse ist bedeutet, dass $y'_A(t') = y'_E(t')$ woraus folgt:

$$1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{V}{c} = 0 \quad \rightarrow \quad V = \frac{\sqrt{3}}{2}c. \tag{13}$$

Da $V < c$ existiert so ein Bezugssystem in der Tat. Der γ-Faktor ist

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = 2. \tag{14}$$

(c) Die Länge des Stabes kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt t' gemessen werden. Wir wählen $t' = 0$.

$$L' = |\vec{r}'_E(0) - \vec{r}'_A(0)| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma(V)}\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{L}{\gamma(V)} = \frac{\sqrt{3}}{4}L. \tag{15}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}'_A = \vec{v}'_E$ des Stabes lässt sich am einfachsten aus $\vec{r}'_A(t') = \vec{v}'t'$ ablesen:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -V \\ \frac{2c}{3\gamma(V)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}c \\ \frac{c}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}'| = \frac{\sqrt{31}}{6}c. \tag{16}$$

1. **Seil zwischen Raketen**

Zwei Raketen befinden sich entlang der x-Achse an den Positionen R_1 und R_2 im Abstand L_0. Ein Seil der Länge L_0 sei genau zwischen den beiden Raketen gespannt. Leider besteht das Seil aus einem Material, das reißt, wenn es um mehr als 1% gedehnt wird (d.h wenn die Länge von R_1 nach R_2 in seinem Ruhesystem $1,01 \cdot L_0$ überschreitet). Beide Raketen sollen zur selben Zeit $t_0 = 0$ starten, und bis zum Zeitpunkt $t_1 = 2 \cdot 10^6$ s (Erdzeit) mit konstanter Beschleunigung $\vec{a} = 30\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}\vec{e}_x$ (im jeweiligen momentanen Ruhesystem) beschleunigen, bevor sie dann gleichförmig bewegt weiterfliegen.

Wird die Beschleunigungsphase funktionieren, ohne dass etwas reißen muss? (Hinweis: Berechne den Abstand zwischen R_1 und R_2 lange nach der Beschleunigungsphase sowohl im Ruhesystem der Erde als auch im mitbewegten System und skizziere das zugehörige Minkowski-Diagramm.)

Lösung:

Hyperbolische Bewegung mit $\vec{a} = a\vec{e}_x$. Für $t \le t_0 = 0$ gilt $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = L_0$, $v_1(t) = v_2(t) = 0$. Für $0 \le t \le t_1$ gilt:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right), \\ x_2(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right)+L_0, \\ v_1(t) &= v_2(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Für $t \ge t_1$ gilt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_1)+v(t_1)\,(t-t_1)\,, \\ x_2(t) &= x_2(t_1)+v(t_1)\,(t-t_1)\,, \\ v_1(t) &= v_2(t) = v(t_1) \end{aligned}$$

Der Abstand im (ruhenden) Erdsystem S ist also stets $x_2(t) - x_1(t) = L_0$, für alle t.

Betrachtet man nun den Abstand L_0' im bewegten System S' zu einem Zeitpunkt t, zu dem beide Raketen ruhen, so findet man die Länge

$$L_0' = \gamma(v(t_1))L_0 > L_0.$$

Einsetzen der Zahlen $a = 3000\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $c = 3\times10^{10}\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $t_1 = 2\times10^6\,\mathrm{s}$ liefert:

$$\gamma(v(t_1)) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t_1)}{c^2}}} = \sqrt{1+\frac{a^2t_1^2}{c^2}} = \sqrt{1,04} \approx 1,0198 > 1,01.$$

D.h. das Seil (oder das Netz) muss bis dahin bereits gerissen sein.

2. **Relativistischer Ruck**

Der Ruck (engl. „jerk") ist definiert als die Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit: $\vec{j} = d\vec{a}/dt$. Analog zur Vierergeschwindigkeit $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ und zur Viererbeschleunigung $a^\mu = du^\mu/d\tau$ könnte man einen Viererruck[1] wie folgt definieren:

$$j^\mu = \frac{da^\mu}{d\tau}.$$

(a) Berechne die (Dreier-)komponenten des Viererrucks j^μ. Drücke das Ergebnis durch Dreiergeschwindigkeit, Dreierbeschleunigung, und Dreierruck aus.

(b) Zeige, dass der Viererruck im momentanen Ruhesystem ($\vec{v} = 0$) nicht raumartig sein muss.

(c) Zeige, dass sich ein sinnvoller, relativistischer Viererruck, für den allgemein $J^\mu u_\mu = 0$ gilt (und der somit wie die Viererbeschleunigung im momentanen Ruhesystem immer raumartig ist), wie folgt definieren lässt:

$$J^\mu \equiv j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu.$$

Welchen Wert hat die Konstante α (die nicht mehr von u, a, j, ... abhängt)?

Hinweis: die Konstante α lässt sich mit dem richtigen Ansatz sehr elegant kovariant in Vierervektoren bestimmen. Eine explizite Rechnung mit Dreierkomponenten ist nicht notwendig (aber ebenfalls möglich).

Lösung:

[1] Der Viererruck soll nicht mit dem Viererstrom j^μ verwechselt werden.

(a) Vierervektor: $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$.

Vierergeschwindigkeit: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{d(ct)}{dt} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$.

(wobei $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left(c^2 dt^2 - d\vec{x}^2\right) = dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right) = dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) = dt^2 \left(1-\beta^2\right)$.
$\rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$.)

Viererbeschleunigung: $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{du^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left[\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}\right] = \gamma \left[\left(\frac{d}{dt}\gamma\right) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{dc}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix}\right]$
$= \gamma \left[\gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \end{pmatrix}$.

(wobei $\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{2\vec{v}}{c^2}\right)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$.)

Viererruck: $j^\mu = \frac{da^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{da^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4\gamma^7 \frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})^2}{c^3} + \gamma^5 \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} + \gamma^5 \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c} \\ 4\gamma^7 \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)^2 \vec{v} + \gamma^5 \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^5 \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c^2}\vec{v} + 3\gamma^5 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{a} + \gamma^3 \vec{j} \end{pmatrix}$
(wobei $\frac{d}{dt}\gamma^n = n\gamma^{n-1}\frac{d}{dt}\gamma = n\gamma^{n-1}\gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = n\gamma^{n+2}\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$.)

(b) Für $\vec{v} = 0$ (und damit $\gamma = 1$) gilt: $j^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$. Je nach Größe von $\vec{a}$ oder $\vec{j}$ kann das entweder raum-, zeit-, oder lichtartig sein.

(c) $u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{v}^2 = \gamma^2 c^2 \left(1-\beta^2\right) = \frac{1}{1-\beta^2} c^2 \left(1-\beta^2\right) = c^2$.

$\frac{d}{d\tau}\left(u^\mu u_\mu\right) = \frac{d}{d\tau}\left(c^2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d}{d\tau}u^\mu\right) u_\mu + \underbrace{u^\mu \left(\frac{d}{d\tau}u_\mu\right)}_{=g_{\nu\mu}u^\mu\left(\frac{d}{d\tau}u^\nu\right)=u_\nu\left(\frac{d}{d\tau}u^\nu\right)=\left(\frac{d}{d\tau}u^\nu\right)u_\nu} = 0$

$\rightarrow \quad 2\left(\frac{d}{d\tau}u^\mu\right) u_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad 2a^\mu u_\mu = 0.$

Nochmaliges Ableiten: $\frac{d}{d\tau}\left(a^\mu u_\mu\right) = j^\mu u_\mu + a^\mu a_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad j^\mu u_\mu = -a^\mu a_\mu \neq 0$.

Neuer Ansatz: $J^\mu u_\mu = \left(j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu\right) u_\mu = \underbrace{j^\mu u_\mu}_{-a^\mu a_\mu} + \alpha a^\nu a_\nu \underbrace{u^\mu u_\mu}_{c^2} = \underbrace{\left(-1+\alpha c^2\right)}_{\stackrel{!}{=}0} a^\mu a_\mu \stackrel{!}{=} 0.$

$\rightarrow \alpha = \frac{1}{c^2}$.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2, 3a, 3bc