

Übungsblatt 12

für das Tutorium am 22.6.2018

1. Gedrehter Stab

In einem Inertialsystem S befindet sich ein Stab in der xy -Ebene und bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}c$ in y -Richtung. Die Länge des Stabes in S ist L . Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege ein Ende des Stabes im Ursprung des Koordinatensystems, während sich der Rest des Stabes im vierten Quadranten befindet und mit der x -Achse einen Winkel von 30° einschließt.

- Wie groß ist die Ruhelänge L_0 des Stabes?
- Gibt es ein Inertialsystem S' , das sich mit Geschwindigkeit V relativ zur x -Richtung bewegt, in dem der Stab parallel zur x' -Achse ist? Wie groß ist V ?
- Welche Länge L' besitzt der Stab in S' . Was ist seine Geschwindigkeit \vec{v}' ?

2. Seil zwischen Raketen

Zwei Raketen befinden sich entlang der x -Achse an den Positionen R_1 und R_2 im Abstand L_0 . Ein Seil der Länge L_0 sei genau zwischen den beiden Raketen gespannt. Leider besteht das Seil aus einem Material, das reißt, wenn es um mehr als 1% gedehnt wird (d.h wenn die Länge von R_1 nach R_2 in seinem Ruhesystem $1,01 \cdot L_0$ überschreitet). Beide Raketen sollen zur selben Zeit $t_0 = 0$ starten, und bis zum Zeitpunkt $t_1 = 2 \cdot 10^6$ s (Erdzeit) mit konstanter Beschleunigung $\vec{a} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \vec{e}_x$ (im jeweiligen momentanen Ruhesystem) beschleunigen, bevor sie dann gleichförmig bewegt weiterfliegen.

Wird die Beschleunigungsphase funktionieren, ohne dass etwas reißen muss? (Hinweis: Berechne den Abstand zwischen R_1 und R_2 lange nach der Beschleunigungsphase sowohl im Ruhesystem der Erde als auch im mitbewegten System und skizziere das zugehörige Minkowski-Diagramm.)

3. Relativistischer Ruck

Der Ruck (engl. „jerk“) ist definiert als die Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit: $\vec{j} = d\vec{a}/dt$. Analog zur Vierergeschwindigkeit

$u^\mu = dx^\mu/d\tau$ und zur Viererbeschleunigung $a^\mu = du^\mu/d\tau$ könnte man einen Viererruck¹ wie folgt definieren:

$$j^\mu = \frac{da^\mu}{d\tau}.$$

- (a) Berechne die (Dreier-)komponenten des Viererrucks j^μ . Drücke das Ergebnis durch Dreiergeschwindigkeit, Dreierbeschleunigung, und Dreieruck aus.
- (b) Zeige, dass der Viererruck im momentanen Ruhesystem ($\vec{v} = 0$) nicht raumartig sein muss.
- (c) Zeige, dass sich ein sinnvoller, relativistischer Viererruck, für den allgemein $J^\mu u_\mu = 0$ gilt (und der somit wie die Viererbeschleunigung im momentanen Ruhesystem immer raumartig ist), wie folgt definieren lässt:

$$J^\mu \equiv j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu.$$

Welchen Wert hat die Konstante α (die nicht mehr von u , a , j , ... abhängt)?

Hinweis: die Konstante α lässt sich mit dem richtigen Ansatz sehr elegant kovariant in Vierervektoren bestimmen. Eine explizite Rechnung mit Dreierkomponenten ist nicht notwendig (aber ebenfalls möglich).

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2, 3a, 3bc

¹Der Viererruck soll nicht mit dem Viererstrom j^μ verwechselt werden.