1 Tutorium für 15.03.2019

Gradient, Divergenz und Rotation sind in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$(\nabla g)_i = \partial_i g\,, \qquad \nabla\cdot\mathbf{F} = \partial_j F_j\,, \qquad (\nabla\times\mathbf{F})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j F_k\,.$$

Der Index i heißt *freier Index*, die restlichen heißen *Dummyindizes*.

1.1 Identitäten mit Gradient, Divergenz und Rotation

Seien $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ beliebige Vektorfelder und sei $g(\mathbf{r})$ ein beliebiges skalares Feld. Zeige:

(a) $\nabla\cdot(g\mathbf{F}) = g\,\nabla\cdot\mathbf{F} + \nabla g\cdot\mathbf{F}$

(b) $\nabla\times(g\mathbf{F}) = g\,\nabla\times\mathbf{F} + \nabla g\times\mathbf{F}$

(c) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$

(d) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

1.2 Rotations- und Divergenzfreiheit

Ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ hat die Form $F_i = r_i f(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$.

(a) Zeige, dass das Feld überall wirbelfrei ist: $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) Für welche Funktionen $f(r)$ verschwindet auch die Divergenz überall: $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Gib die allgemeinste Form der Funktion $f(r)$ an.

1.3 Koordinatenfreie Definition der Rotation

Die Rotation (curl) eines Feldes $\mathbf{F}$ in einem Punkt $\mathbf{r}$ ist das infinitesimale Kurvenintegral pro Fläche A entlang einer Kurve C, die diese Fläche um den Punkt einschließt. Es ist abhängig von der Orientierung der Fläche, gegeben durch den (Einheits-) Normalvektor $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\,.$$

Berechne die Rotation des Feldes $F_i = \epsilon_{i3k} r_k$ in einem beliebigen Punkt $\mathbf{r}$

(a) durch Ableitung der kartesischen Koordinaten $\epsilon_{ijk}\partial_j F_k$, und

(b) mithilfe obiger Limesbildung.

---

ankreuzbar: 1.1(ab), 1.1(cd), 1.2(a), 1.2(b), 1.3(ab)