2 Tutorium für 22.03.2019 (v1.3)

2.1 Zerlegung von Vektorfeldern

Sei $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$ und

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^2 z \\ z^2 x \end{pmatrix}.$$

Finde ein wirbelfreies (irrotational) Feld $\boldsymbol{F}$ und ein divergenzfreies (solenoidal) Feld $\boldsymbol{G}$, sodass $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$.

2.2 Elektrischer Fluss

Das elektrische Feld einer Punktladung im Ursprung ist proportional zu $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}/r^3$ mit $r = |\boldsymbol{r}|$. Berechne den Fluss $\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ durch folgende Flächen S:

(a) Eine Kugel S_a mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung.

(b) Eine Kugel S_b mit Radius R und Mittelpunkt in $(R/2, 0, 0)^T$.

(c) Eine Scheibe S_c mit Radius R, die die Kugel S_a mit gleichem Radius mittig berührt.

2.3 Krummlinige Koordinaten

Das elektrische Potential eines geladenen Stabes der Länge $2a$ lässt sich kompakt in (prolaten) spheroidalen Koordinaten (μ, ν, φ) anschreiben, in denen die kartesischen Koordinaten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} x &= a \sinh\mu \sin\nu \cos\varphi \\ y &= a \sinh\mu \sin\nu \sin\varphi \\ z &= a \cosh\mu \cos\nu\,, \end{aligned}$$

mit $0 < \mu$, $0 \leq \nu \leq \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(a) Bestimme die Divergenz des Gradienten vom elektrischen Potential des Stabes

$$V(\mu, \nu, \phi) = \log\left(\frac{\cosh(\mu) + 1}{\cosh(\mu) - 1}\right).$$

(b) Zeige, dass das äquatoriale Nahfeld ($\mu \ll 1$, $\nu \approx \pi/2$) asymptotisch Zylinderkoordinaten, und das Fernfeld ($1 \ll \mu$) asymptotisch Kugelkoordinaten entspricht. Gib die entsprechenden approximativen Transformationen des Potentiales V an.

---

ankreuzbar: 2.1, 2.2(ab), 2.2(c), 2.3(a), 2.3(b)