6 Tutorium für 10.05.2019

6.1 Regularisierung des Coulomb Feldes

Wir modifizieren das elektrische Feld einer Punktladung Q im Ursprung zu

$$\boldsymbol{E}_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}}$$

mit $r = \sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}$ und $\varepsilon > 0$, sodass es überall regulär ist ($|\boldsymbol{E}_\varepsilon| < \infty$), und $\lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{E}_\varepsilon(\boldsymbol{r})$ dem tatsächlichen singulären Feld einer Punktladung entspricht.

(a) Berechne die Divergenz $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ als Funktion von r und skizziere sie für $\varepsilon \ll 1$, ≈ 1 und $\gg 1$.

(b) Zeige, für jede Kugel V im Ursprung mit Radius $R > 0$ und Oberfläche S gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}\,.$$

6.2 Planares Feld

Zwei lange dünne Stäbe parallel zur z-Achse mit den Achsen durch die Punkte $(\pm d, 0, 0)^T$ tragen die Ladung $\pm q$ pro Länge.

(a) Bestimme das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ sowie das Potential $V(\boldsymbol{r})$ und zeichne die Feldlinien sowie die Äquipotentialflächen im xy-Schnitt.

(b) Wir stellen nun Punkte der xy-Ebene durch eine komplexe Zahl $c = x + \mathrm{i}y$ dar. Finde eine komplexwertig differenzierbare Funktion $\Phi(c) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass

$$\operatorname{Re}\Phi(x+\mathrm{i}y) = V(x, y, 0)$$

und zeiche die Linien konstanten Real- und Imaginärteiles von $\Phi(c)$ in der komplexen Ebene.
(differenzierbar: rationale Polynome, $\exp(c)$, $\log(c)$, $\ldots$; nicht differenzierbar: $\bar{c}$)

6.3 Abschirmung einer geladenen Platte

Eine Platte in der xy-Ebene trägt die Ladung q pro Fläche. Auf der positiven z-Seite bildet sich eine Schicht aus gegengleich geladenem Plasma. Druck p_{pl} und Dichte ρ_{pl} im Plasma folgen der idealen Gasgleichung $p_{\mathrm{pl}} = k_{\mathrm{B}}T\rho_{\mathrm{pl}}$.

(a) Finde die Dichteverteilung $\rho^0_{\mathrm{pl}}(z)$ unter Vernachlässigung jeder Abschirmung.

(b) Verwende $\rho^0_{\mathrm{pl}}(z)$ um die Abschirmung der Plattenladung q durch das gegengleich geladene Plasma abzuschätzen und finde die sich daraus ergebende Dichteverteilung $\rho^1_{\mathrm{pl}}(z)$. ($\rho^1_{\mathrm{pl}}(z)$ ist nicht mehr normierbar)

---

ankreuzbar: 6.1(ab), 6.2(a), 6.2(b), 6.3(a), 6.3(b)