11. Tutorium - Lösungen 19.06.2020

11.1 Kugelwelle

a) Wir berechnen die Komponenten des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten mit

$$\vec{e}_z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta.$$

Damit berechnen wir das Magnetfeld mithilfe des Rotors in Kugelkoordinaten.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\\ &= \vec{e}_\varphi\left(-ik + \frac{1}{r}\right)\frac{a_0}{r}\sin\theta e^{i(kr-\omega t)}.\end{aligned}$$

Um das elektrische Feld zu erhalten verwenden wir $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Wir verwenden wieder den Rotor in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{-c}{i\omega}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\varphi)\\ &= \frac{2c}{i\omega}\left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{a_0}{r}\cos\theta e^{i(kr-\omega t)}\\ E_\theta &= -\frac{-c}{i\omega}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\\ &= \frac{c}{i\omega}\left(k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{a_0}{r}\sin\theta e^{i(kr-\omega t)}\\ E_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

b) In der Strahlungszone wo $r \gg \lambda$ berücksichtigen wir nur die führenden Terme. Insbesondere können wir die Radialkomponente des elektrischen Feldes gegenüber der θ-Komponente vernachlässigen. Weiters verwenden wir die Dispersionsrelation $\omega = kc$. Die asymptotischen Werte der Felder sind daher

$$\begin{aligned}\vec{B}^{r\gg\lambda} &= -ik\sin\theta\frac{a_0}{r}e^{i(kr-\omega t)}\vec{e}_\varphi\\ \vec{E}^{r\gg\lambda} &= -ik\sin\theta\frac{a_0}{r}e^{i(kr-\omega t)}\vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

Die Felder haben also eine $\frac{1}{r}$-Abhängigkeit.
c) Wir berechnen zunächst den Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H},$$

wobei im Vakuum $\vec{H} = \vec{B}$. Wir benötigen die Realteile der Felder. Es gilt

$$\mathrm{Re}\left[-ie^{i(kr-\omega t)}\right] = \sin(kr-\omega t).$$

Somit sind die physikalischen Felder auch nicht singulär an $r = 0$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi}\vec{E}^{r\gg\lambda}\times\vec{B}^{r\gg\lambda}\\ &= \frac{k\omega}{4\pi}\sin^2\theta\left(\frac{a_0}{r}\right)^2\sin^2(kr-\omega t)\vec{e}_r.\end{aligned}$$

Die abgestrahlte Gesamtleistung ist

$$P = \oint_{\partial V} d\vec{f}\vec{S} = \oint d\Omega\, r^2 \vec{e}_r \vec{S}. \tag{1}$$

Die zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung pro Raumwinkelelement ist somit

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = r^2 \langle \vec{S} \rangle \vec{e}_r = \frac{k\omega}{8\pi} a_0^2 \sin^2\theta.$$

Hierbei haben wir $\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2}$ verwendet.
d) Um die gesamte Abstrahlung zu erhalten integrieren wir über den gesamten Raumwinkel, wobei

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{k\omega a_0^2}{8\pi} \sin^3\theta \\ &= \frac{k\omega a_0^2}{3}. \end{aligned}$$

11.2 Helmholtz-Spule

a) Für die Spule bei $z = d$ wählt man $\vec{r}\,' = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, d)$, $\mathrm{d}\vec{r}\,' = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\mathrm{d}\varphi$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Die Spule wird N Mal durchlaufen.

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{c}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \\ &= \frac{1}{c} I \int_0^{2\pi N} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - r\cos\varphi \\ y - r\sin\varphi \\ z - d \end{pmatrix} \frac{1}{\left((x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Für die zweite Spule ersetze man $d \to -d$. Also ergibt sich für beide Spulen:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{2\pi N I}{c}\left[\frac{r^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}} + \frac{r^2}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{3/2}}\right]\vec{e}_z.$$

b) Erste Ableitung

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{2\pi N I}{c}\left[-\frac{3}{2}\frac{r^2 2\,(z-d)}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{5/2}} - \frac{3}{2}\frac{r^2 2\,(z+d)}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{5/2}}\right],$$

also $\partial B/\partial z|_{z=0} = 0$.
Zweite Ableitung:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \frac{2\pi N I}{c}(-3)\left[\frac{r^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{r^2 2\,(z-d)^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{7/2}} + \frac{r^2}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{r^2 2\,(z+d)^2}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{7/2}}\right].$$

Forderung dass die zweite Ableitung an der Stelle $z = 0$ verschwindet, gibt als nicht-triviale Lösung $d = r/2$.
Das Magnetfeld im Zentrum bei diesem Abstand beträgt

$$\vec{B}(0,0,z)\Big|_{d=\frac{r}{2}} = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}c}\frac{NI}{r}\vec{e}_z.$$

11.3 Metallischer Spiegel

a) Der Ansatz ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \left[E_0^+ \cos(kz-\omega t) + E_0^- \cos(-kz-\omega t)\right]\vec{e}_x,\\ \vec{B}(z,t) &= \vec{e}_z \times \vec{E}^+(z,t) + (-\vec{e}_z)\times \vec{E}^-(z,t) = \left[E_0^+ \cos(kz-\omega t) - E_0^- \cos(-kz-\omega t)\right]\vec{e}_y.\end{aligned}$$

Der Ansatz erfüllt die Feldgleichungen für $x < 0$. Die Randbedingungen $\text{Div}\vec{B} = 0$ und $\text{Rot}\vec{E} = 0$ sind erfüllt bzw. ergeben $E_0^+ = -E_0^-$. Durch Umformen der trigonometrischen Funktionen erhält man

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= 2E_0^+ \sin kz \sin \omega t \vec{e}_x,\\ \vec{B}(z,t) &= 2E_0^+ \cos kz \cos \omega t \vec{e}_y.\end{aligned}$$

b) Die Flächenladungsdichte wird berechnet über $\text{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$. Damit erhält man $\sigma = 0$.
Die Flächenstromdichte folgt aus $\text{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k}_f$. Damit erhält man $\vec{k}_f = \frac{c}{2\pi}E_0^+ \cos\omega t\vec{e}_x$. (Wechselstrom in x-Richtung)
c) Die Energiedichte wird berechnet durch $w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$
Das Zeitmittel über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ist gegeben durch $\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2$.
Die Energiestromdichte (Poyntingvektor) wird berechnet durch $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$.
Das Zeitmittel ergibt: $\left\langle \vec{S} \right\rangle = 0$.