12. Tutorium - Lösungen 26.06.2020

12.1 Antireflexbeschichtung

Ansatz für $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$ wegen $\mu = 1$: $\vec{n}$, $\vec{E}$, und $\vec{B}$ bilden jeweils orthogonales Dreibein.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1(z,t) &= \vec{e}_x \left(E_1^+ e^{i(k_1 z - \omega t)} + E_1^- e^{i(-k_1 z - \omega t)}\right) && (1)\\
\vec{B}_1(z,t) &= \vec{e}_y \left(n_1 E_1^+ e^{i(k_1 z - \omega t)} - n_1 E_1^- e^{i(-k_1 z - \omega t)}\right) && (2)\\
\vec{E}_2(z,t) &= \vec{e}_x \left(E_2^+ e^{i(k_2 z - \omega t)} + E_2^- e^{i(-k_2 z - \omega t)}\right) && (3)\\
\vec{B}_2(z,t) &= \vec{e}_y \left(n_2 E_2^+ e^{i(k_2 z - \omega t)} - n_2 E_2^- e^{i(-k_2 z - \omega t)}\right) && (4)\\
\vec{E}_3(z,t) &= \vec{e}_x E_3^+ e^{i(k_3 z - \omega t)} && (5)\\
\vec{B}_3(z,t) &= \vec{e}_y n_3 E_3^+ e^{i(k_3 z - \omega t)} && (6)
\end{aligned}$$

Anschlussbedingungen: $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ führt zu Stetigkeit von E_x. $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0 = \mathrm{Rot}B$ wegen $\mu = 1$ führt zu Stetigkeit von B_y. Spezialisieren der Gleichungen an $z = 0$ und $z = d$ führt dann zur angegebenen Lösung.
b)

$$R = \frac{|E_1^-|^2}{|E_1^+|^2} = \frac{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{23}\cos 2k_2 d}{1 + \alpha_{12}^2\alpha_{23}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{23}\cos 2k_2 d}.$$

Maxima und Minima von $R(d) : R'(d) = 0 \rightarrow \sin 2k_2 d = 0$. $d = m\pi/(2k_2) = m\lambda_2/4$ mit $m \in \mathbb{N}$.
Für $d = (2n-1)\lambda_2/4$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt $R = (\alpha_{12} - \alpha_{23})^2 / (1 - \alpha_{12}\alpha_{23})^2 =: R_u$.
Für $d = 2n\lambda_2/4$ folgt $R = (\alpha_{12} + \alpha_{23})^2 / (1 + \alpha_{12}\alpha_{23})^2 =: R_g$.
Fall 1: n_2 liegt zwischen n_1 und n_3: $n_1 < n_2 < n_3$ oder $n_1 > n_2 > n_3$: $\rightarrow$ $\mathrm{sign}\alpha_{12} = \mathrm{sign}\alpha_{23}$, $\alpha_{12}\alpha_{23} > 0$, $R_{\min} = R_u$, $R_{\max} = R_g$. $R_{\min}$ wird erreicht für $\alpha_{12} = \alpha_{23} \rightarrow n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$, bzw. $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$.
Fall 2: n_2 liegt nicht zwischen n_1 und n_3: $\mathrm{sign}\alpha_{12} = -\mathrm{sign}\alpha_{23}$, $\alpha_{12}\alpha_{23} < 0$, $R_{\min} = R_g$, $R_{\max} = R_u$. $R_{\min}$ wird erreicht für $\alpha_{12} = -\alpha_{23} \rightarrow n_1 = n_3$, bzw. $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$.

12.2 Fresnelsches Parallelepiped

a) An zwei Grenzflächen wird Reflexion und Transmission bei senkrechtem Einfall benötigt. Fresnelsche Formeln für senkrechten Einfall für reflektierten (E'') und gebrochenen (E') Strahl, senkrecht (s) und parallel (p) zur Einfallsebene:

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{n'-n}{n'+n}, \quad \frac{E_s''}{E_s} = \frac{n-n'}{n+n'}, \quad \frac{E_p'}{E_p} = \frac{2n}{n'+n}, \quad \frac{E_s'}{E_s} = \frac{2n}{n+n'}.$$

Amplituden ändern sich um $|n_1 - n_2|/(n_1 + n_2)$ bzw. $n_1/(n_1 + n_2)$. Im Falle der Reflexion ändert sich die Phasendifferenz von p- und s-Komponenten um π. Bei der Transmission gibt es keine Änderung der Phasendifferenz.
Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche zwischen Medium und Vakuum:
$n \sin\alpha = n' \sin\alpha'$, mit $n' = 1$ und $\alpha' = \pi/2$ folgt $\sin\alpha_g = 1/n$.
Für $\alpha > \alpha_g$ gibt es keine reelle Lösung für α', aber eine komplexe:
$\cos\alpha' = \sqrt{1 - \sin^2\alpha'} = i\sqrt{\sin^2\alpha' - 1} = i\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}$.
Die Fresnelschen Formeln für den reflektierten Strahl erhalten eine Phase

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{\cos\alpha - n\cos\alpha'}{\cos\alpha + n\cos\alpha'}, \quad \frac{E_s''}{E_s} = \frac{n\cos\alpha - \cos\alpha'}{n\cos\alpha + \cos\alpha'}.$$

Der Ausdruck $\frac{a-ib}{a+ib}$ hat Betrag 1 und eine Phase -2φ mit $\tan\varphi = b/a$. Damit kann man obige Ausdrücke umschreiben:

$$\frac{E_p''}{E_p} = e^{-2i\varphi} \quad \text{mit } \tan\varphi = \frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{\cos\alpha}, \quad \frac{E_s''}{E_s} = e^{-2i\psi} \quad \text{mit } \tan\psi = \frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\cos\alpha}.$$

Die Phasendifferenz nach 2 Totalreflexionen muss $\pi/2$ betragen, damit aus einer linear polarisierten Welle eine zirkular polarisierte Welle wird, also $\delta := 2(\varphi - \psi) = \pi/4$.

$$\tan\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 = \frac{\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\sin^2\alpha} =: f(\alpha, n).$$

Bestimmungsgleichung für α bei gegebenem n, falls Lösung für gegebenes n existiert.
$f(\alpha, n)$ hat Nullstellen für $f(\pi/2, n) = 0$ und $f(\alpha_g(n), n) = 0$. Dazwischen gilt $f(\alpha, n) > 0$, demnach gibt es ein Maximum zwischen $\alpha_g(n) < \alpha < \pi/2$:

$$\frac{\partial f(\alpha, n)}{\partial\alpha} = 0$$

$$\sin^2\alpha_{\max} = \frac{2}{n^2+1}, \quad \cos^2\alpha_{\max} = \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

$$f(\alpha_{\max}, n) = \frac{n^2-1}{2n}.$$

Bedingung für Existenz eines Winkels: $\frac{n^2-1}{2n} \geq \sqrt{2} - 1$: ist erfüllt für $n \geq \sqrt{2} - 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1.49661$ oder $n \leq \sqrt{2} - 1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx -0.66818$.
b) Bei Vernachlässigung von Mehrfachreflexionen gilt für die das Parallelepiped verlassende Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{i\gamma}\Big(|E_p|\vec{e}_p \underbrace{\pm\ i}_{\text{Phasenverschiebung}} |E_s|\vec{e}_s\Big) \underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\text{eintretend}} \underbrace{\frac{2n}{n+1}}_{\text{austretend}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Für zirkulare Polarisation müssen die Beträge gleich sein: $|E_p| = |E_s|$, also die linear polarisierte Welle unter 45° einfallen.
c) Da $n = 1,51 > 1.49661...$ ist das möglich. Man erhält numerisch
$f(\alpha, 1,51) = \sqrt{2} - 1$ ist erfüllt für $\alpha = 48°37'$ und $\alpha = 54°37'$.
Mehrfachreflexion bringt durch Reflexion am Ausgang und am Eingang einen zusätzlichen Beitrag von der Größe

$$\left|\frac{n-1}{n+1}\right|^2.$$

Für $n = 1,51$ beträgt das 0.04, d.h. mit einem Fehler von etwa $\sim 5\%$ ist zu rechnen.

12.3 Strahlungsdruck einer inhomogenen ebenen Welle

a) Die Herleitung aus der Vorlesung muss für allgemeines μ und σ wiederholt werden. Allerdings kann man sich auf den Fall beschränken $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$. Wir nehmen eine linear polarisierte Welle an $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$, $\vec{H}_0 = H_0\vec{e}_y$. Für die reflektierte Welle gilt $\vec{k}'' = -k''\vec{e}_z$, und um das Rechtssystem zu erhalten $\vec{E}_0'' = E_0''\vec{e}_x$ und $\vec{H}_0'' = -H_0''\vec{e}_y$. Mit den Anschlussbedingungen erhält man nach einigen Umformungen den angegebenen Reflexionskoeffizient.

b) Niederfrequenter Fall:

$$n + i\kappa = \sqrt{\mu\eta} = \sqrt{\mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)} \approx \sqrt{i\frac{4\pi\sigma}{\omega}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}, \qquad \Rightarrow \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}$$

Welle mit Wellenvektor $k' = (n + i\kappa)\omega/c$ hat einen exponentiell abfallenden Anteil:

$$\vec{E}'(\vec{r},t) = \frac{1}{2}E_0'\vec{e}_x e^{i(\vec{k}'\vec{x}-\omega t)} + c.c. = \frac{1}{2}E_0'\vec{e}_x e^{-\kappa\frac{\omega}{c}\vec{e}_z\vec{x}} e^{i(n\frac{\omega}{c}\vec{e}_z\vec{x}-\omega t)} + c.c..$$

Für $d \gg c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ folgt $\kappa\frac{\omega}{c}d = d\sqrt{2\pi\sigma\omega}/c \gg 1$ und die Welle ist fast verschwunden. Um den Strahlungsdruck auszurechnen kann man daher ein Volumen um das gesamte Medium annehmen, wobei aber nur die „Vorderseite“ (die im Vakuum knapp vor dem Medium liegt) beiträgt. Vom Maxwellschen Spannungstensor trägt nur $w_{em}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ bei, also Beiträge der einlaufenden und der reflektierten Welle. Der Strahlungsdruck beträgt somit $P = F/A = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}|E_0|^2(1+R)$ (Faktor $\frac{1}{2}$ von Mittelung über eine Periode) mit

$$R = \frac{(n-1)^2 + n^2}{(n+1)^2 + n^2}.$$

Gegenüberliegende Beiträge auf den „Seitenteilen“ der Oberfläche heben sich gegenseitig auf, da der Spannungstensor aufgrund der Translationssymmetrie gleich ist, aber $\mathrm{d}^2\vec{f}$ das Vorzeichen ändert. Es gibt zwar auch einen zeitabhängigen Beitrag vom Volumen, aber für jeden einzelnen Punkt im Volumen verschwindet die zeitlich gemittelte Ableitung des Poynting-Vektors, daher trägt das Volumen nicht bei.