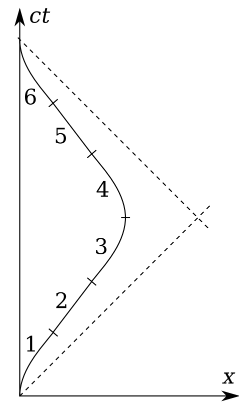
3. Tutorium **für 27.03.2020**

3.1 Zwillingsparadoxon



Während ein Zwilling auf der Erde studiert, reist seine Zwillingsschwester wie in nebenstehender Abbildung gezeigt durchs sonnige Universum: Die Abschnitte (1), (3), (4), (6) sind jeweils Pfade konstanter Beschleunigung von gleichem Betrag a in ihrem jeweiligen momentanen Ruhesystem, während die Abschnitte (2) und (5) gleichförmige Bewegung beschreiben.

a) Wie verhalten sich die Eigenzeitintervalle $\Delta\tau_E$ und $\Delta\tau_R$ zueinander, die auf der Erde bzw. in der Rakete vergangen sind, wenn sich die Zwillinge wieder treffen? Dabei möchte die Zwillingsschwester auf ihrer Reise insgesamt die gleiche Zeitdauer (aus der Sicht des Bezugssystems der Erde) beschleunigen wie sie gleichförmig bewegt fliegt. Wie groß sind die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ und die maximale Entfernung $x_{\max}$, die sie dabei erreicht?

b) Die Schwester will mit der gleichen Treibstoffmenge noch weiter fliegen, also verlängert sie die Reiseabschnitte gleichförmiger Bewegung (2) und (5). Zeige, dass im Grenzfall sehr langer Reisen gilt

$$\Delta\tau_R = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}.$$

c) Zeichne das zugehörigen Minkowski-Diagramme in diesem Grenzfall sehr langer Reisen aus der Sicht des auf der Erde bleibenden Bruders. Zeiche die Zeitpunkte des Umkehrereignisses der Schwester sowohl für das weg fliegende als auch für das zurück fliegende Inertialsystem entlang der Zeitachse des Bruders ein, die seine Eigenzeit in die Teilabschnitte $\Delta\tau_E^{(1)}$, $\Delta\tau_E^{(2)}$ und $\Delta\tau_E^{(3)}$ unterteilen. Wie groß sind die drei Teilabschnitte ausgedrückt durch $\Delta\tau_R$?

3.2 Relativistischer Ruck

Der Ruck (engl. „jerk“) ist definiert als die Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit: $\vec{j} = d\vec{a}/dt$. Analog zur Vierergeschwindigkeit $u^\mu = dx^\mu/d\tau$

und zur Vierebeschleunigung $a^\mu = du^\mu/d\tau$ könnte man einen Viererruck[1] wie folgt definieren:

$$j^\mu = \frac{da^\mu}{d\tau}.$$

a) Berechne die (Dreier-)komponenten des Viererrucks j^μ. Drücke das Ergebnis durch Dreiergeschwindigkeit, Dreierbeschleunigung, und Dreierruck aus.
b) Zeige, dass der Viererruck im momentanen Ruhesystem ($\vec{v} = 0$) nicht raumartig sein muss.
c) Zeige, dass sich ein sinnvoller, relativistischer Viererruck, für den allgemein $J^\mu u_\mu = 0$ gilt (und der somit wie die Viererbeschleunigung im momentanen Ruhesystem immer raumartig ist), wie folgt definieren lässt:

$$J^\mu \equiv j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu.$$

Welchen Wert hat die Konstante α (die nicht mehr von u, a, j, ... abhängt)? Hinweis: die Konstante α lässt sich mit dem richtigen Ansatz sehr elegant kovariant in Vierervektoren bestimmen. Eine explizite Rechnung mit Dreierkomponenten ist nicht notwendig (aber ebenfalls möglich).

3.3 Thomaspräzession

Ein sehr schnelles Flugzeug ($\gamma \neq 1$) fliegt auf einer Kreisbahn um die Erde. Approximiere die Kreisbahn durch ein Polygon mit N Seiten, wobei $N \gg 1$. Im Erdsystem ändert das Flugzeug nach durchfliegen einer Seite des Polygons den Kurs um $\theta = 2\pi/N$. Bestimme die nötigen Kursänderungen im Ruhesystem des Flugzeug während einer Erdumrundung.
Im Limes $N \to \infty$ erhalten wir wieder die Kreisbahn. Die Differenz $\Delta\theta$ von dem Ergebnis oben und den 2π, die man im Erdsystem erhält, folgt aus der Thomaspräzession, also daher, dass zwei Lorentzboost nacheinander einer *Drehung* mal einem Lorentzboost entsprechen. Dies ist detailliert im Buch von Prof. Rebhan auf den Seiten 344 und 345 erklärt.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a, 2bc, 3

[1] Der Viererruck soll nicht mit dem Viererstrom j^μ verwechselt werden.