

7. Tutorium

für 15.05.2020

7.1 Energie-Impuls-Tensor

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Metrik ein dynamisches Feld $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Der Energie-Impuls-Tensor folgt aus der Variation der Wirkung bzgl. der Metrik $g_{\mu\nu}$. Für die Maxwell-Wirkung ausgewertet im Minkowski-Raum $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist er gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right), \quad (1)$$

mit $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

- Berechne $\partial_\nu T^{\mu\nu}$ und vereinfache mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen in Vierernotation.
- Berechne die Spur von $T^{\mu\nu}$.

7.2 Multipolmomente eines Kreuzes

Linienladungen mit Ladungsdichte λ seien in der Form eines Kreuzes platziert. Eine Linienladung gehe von $(-a, 0, 0)$ bis $(a, 0, 0)$, die zweite von $(0, -b, 0)$ bis $(0, b, 0)$.

- Bestimme die Gesamtladungsdichte $\rho(\vec{x})$ der Konfiguration.
- Berechne die Dipol- und Quadrupolmomente in kartesischen Koordinaten.
- Berechne die ersten zwei Terme in der Multipolentwicklung des Potentials $\phi(0, 0, z)$ für $z \gg a, b$.
- Berechne die ersten zwei Terme in der Multipolentwicklung des elektrischen Feldes $\vec{E}(0, 0, z)$.

7.3 Multipolmomente von Ellipsoiden

Gegeben seien zwei bezüglich der z -Achse rotationssymmetrische Ellipsoide mit Hauptachsen $a = b, c$.

- Das erste Ellipsoid sei homogen mit Raumladungsdichte ρ_0 geladen. Berechne hierfür die elektrostatischen sphärischen Multipolmomente q_{lm} mit $l \leq 2$ und schreibe das elektrostatische Potenzial in der entsprechenden Näherung für $r > \max(a, c)$ an.

- b) Das zweite Ellipsoid von der selben Form sei für $z > 0$ positiv und für $z < 0$ negativ mit Raumladungsdichte $\pm\rho_0$ geladen. Wie sehen die entsprechenden Multipolmomente und Potenziale für $l \leq 2$ aus (wieder bezüglich des Zentrums des Ellipsoids)?
- c) In welche Richtung wirkt die Kraft auf das erste Ellipsoid, wenn es sehr weit weg vom zweiten Ellipsoid platziert wird (in Abhängigkeit von ϑ und φ)? (Es braucht nur der führende nicht-verschwindende Term der Entwicklung angegeben werden).
-

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 2cd, 3a, 3bc